昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2015年3月1日発行　第53巻3号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

3
2015

特集
団代数をめぐって
新たな共通構造の認識



No.621

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-113：for Senior & Graduate Courses）

4次元微分幾何学への招待

不定値計量の存在，ニュートラル計量，複素曲面，ツイスター

松下泰雄・鎌田博行・中田文憲　共著

定価 2500 円

数学において幾何学を目指す方々，さらには理論物理学に関心のある多くの方々に向けて，4 次元空間の豊かな世界を，4 次元多様体における不定値計量，特にニュートラル計量の存在条件を見ることから紹介した得難い一冊．複素曲面論，ツイスター理論といった関連する現在大きく発展しつつあるトピックスもとり上げニュートラル計量の微分幾何学の一端も紹介．

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 621 March 2015

団代数をめぐって

新たな共通構造の認識

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2011年/12 省略

2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ[物理編]
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想[物理編]
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理

2013年/1 表現論の世界
/2《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学
/7 群と物理学
/8 エネルギーを通して物理学を知る
/9 ボーア
/10 分類する《数理科学》
/11 理論物理と実験物理の交錯
/12 物理学における存在とは

2014年/1 波と粒子
/2 利用する物理
/3 幾何学における様々な発想
/4 物理現象における表現の多様さ
/5 数理科学における代数的構造
/6 数学と物理における空間概念
/7 モノポールの謎
/8 ベクトル解析の力
/9 重力の謎と魅力
/10 複素解析の視点
/11 応用するトポロジー
/12 場と力の物理イメージ

2015年/1 科学における〈時間〉
/2 物理学諸分野の拡がりとつながり

数理科学臨時別冊一覧

14年/6 格子模型の数理物理
14年/7 数物系のためのミラー対称性入門
14年/8 情報幾何学の新展開
14年/9 作用素環と無限量子系
14年/10 重力とエントロピー
14年/11 数学的な感覚の探求
14年/12 4次元微分幾何学への招待
15年/1 ゲージ理論の基礎数理

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店八王子店
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
MARUZEN 多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店

MARUZEN & ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN 広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

March 2015 MATHEMATICAL SCIENCES Number 621

特集／団代数をめぐって

団代数とは何か

中西 知樹

本特集の主題である**団代数**（cluster algebra）とは，Fomin と Zelevinsky が 2000 年頃に導入したある種の可換代数のクラスである．団代数には団変数と呼ばれるある特別な生成元が存在し，それらが「変異（mutation）」と呼ばれる関係式（あるいは漸化式）で互いに結びついている，という際立った特徴がある．このような概念は Lie 理論においてさまざまな文脈で現れる代数的・組合せ論的構造（例えば，Grassmannian の Plücker 座標や Lie 群の座標環における関係式）を，「Laurent 性」という共通の性質に着目して統合化・一般化したものであり，これにより Lie 群や量子群における組合せ論的構造や現象のより包括的な理解を得ようというのが団代数の導入のもともとの動機であったものと思われる．

団代数に最初に注目したのは多元環の表現論の研究者たちであった．彼らは団代数における変異と，多元環の Auslander–Reiten 理論に現れる変異との顕著な類似性に注目し，その結果，Buan, Marsh, Reineke, Reiten, Todorov たちは，ADE 型と呼ばれる団代数に対して多元環の表現による圏化を与えるに至った．これは 2004 年頃のことである．これを契機に，その後多元環の表現論と団代数は互いに関連しながら飛躍的な進展を遂げ，現在でも蜜月の関係が続いている．

一方，やはり 00 年代前半に，Gekhtman, Shapiro, Vainshtein たちは離散力学系の Poisson 構造の立場から，また，Fock と Goncharov は Teichmüller 理論の立場から，それぞれ Fomin と Zelevinsky の仕事の影響を受けつつも，本質的には独立に団代数の変異の概念に到達したことは意義深い．

ところで，日本においては，少なくとも 00 年代の終わり頃までは（多元環論の一部の研究者を除いては）このような潮流の影響をほとんど受けなかったように思われる．例えば，私自身が団代数を初めて認識したのは 2008 年 3 月に参加したバークレーの数理科学研究所（MSRI）における Lie 理論の研究集会のことであった．そこでは，「cluster algebra」をタイトルに含む講演が 5 つほどあり，当初プログラムを見て「cluster algebra とは何ぞや」と思ったものであった．しかしながら，研究集会冒頭の Fomin による基調講演を聞くや否や，それが私が 90 年代から研究を続けていた可積分系における T 系や Y 系といった代数関係式と本質的に同じものであることを認識した．そして，それをきっかけに，現在まで団代数とその応用の研究を続けるに至っている．

実は，このような団代数の研究を始めるいきさつはどうやら私だけの特別なものではないようで，2008 年 12 月にメキシコで私自身としては初めて団代数をテーマにした研究集会に参加したとき，当時すでに団代数について多くの論文を書いていた

Jan Schröer 氏に「I am a newcomer in cluster algebras.」と自己紹介して上の経緯を話したところ，「Oh, I had exactly the same experience.」と言われ，さらに「Everyone is a newcomer!」と言われてずいぶんと気が楽になったことを良く覚えている．つまり，（少なくとも当時は）はじめから団代数の専門家という人はなく，皆それぞれの分野において「このようなことは私は見たことがある」あるいは「私は昔から良く知っている」という人たちが団代数に集まってきたのであった．

このように書くと，Fomin と Zelevinsky の業績は皆がすでに知っているある種の代数的・組合せ論的構造に名前をつけただけのように誤解を与えたかもしれないが，もちろんそうではない．彼らがそれを団代数という特別な共通構造として認識して，それに関する理論と道具を整えてくれたことによって，それまでは個別には太刀打ちできなかったことが解決されたり，あるいは新しい認識へと進展できるようになったのであった．

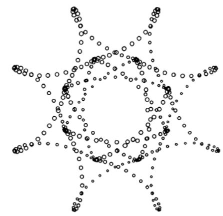
閑話休題．そろそろ，この文章のタイトルにある本題「団代数とは何か」について筆を進めなければならない．もちろん，数学におけるこの種の「～～とは何か？」という問は通常はさまざまな観点による重層的な答を持つものであり，一つの閉じた答というものはないものである．しかし，そうであっても，自分が専門と自認している対象について「それは何か」と問われれば，自身の立場からは一応は何らかの答は述べるべきものであろう．そこで，以下は私見に過ぎないと強く断りを入れた上で，私の現時点での考えを述べよう．

団代数も導入後 15 年近くが経ち，多様な分野との関わりが多数明らかになり，現在では，団代数が数学の諸分野に遍在的に現れる一つの基礎的な（underlying）代数的・組合せ論的構造である，という認識に異論はないであろう．しかし，これは団代数とは何かという問に対する答としてはいささか抽象的である．ところで，（話の展開としてはやや強引ではあるが！）このような団代数の遍在性（ubiquity）は，同じく代数的・組合せ論的構造であるところの「ルート系（あるいは Coxeter 群）」を想起させる．そして，実のところ，私（および私の周辺のある人たち）は，団代数の理論とは，ルート系の理論の一つの拡張である，と認識している．例えば，団代数における中心概念である変異は対合的であるが，これはルート系における鏡映線形変換の有理変換版であり，また，変異のトロピカル版は鏡映線形変換の区分線形版と見なすことができる．残念なことに，このような観点はいまだ未成熟であり，具体的に団代数理論をルート系の拡張理論として定式化する，という段階には至っていない．しかし，いわゆる第ゼロ近似として「団代数理論はルート系の拡張理論である」と思って眺めることは，少なくとも現時点においては良い立脚点であると考えている．

最後に，「cluster」という語はもともとは通常の英単語であるが，日本では「クラスター（クラスタ）分析」など技術用語としての意味が先行して，本来の意味が必ずしも定着しているとは思われないのでそれについて触れておく．この単語について Oxford 英語辞典を引くと，「1. a group of things of the same type that grow or appear close together, 2. a group of people, animals or things close together」とある．つまり，「同種のもの・人が近接している状態」を意味し，ものの種類や規模に応じて「群れ」,「集まり」,「集団」などと訳される．例えば，a cluster of spectators（観客の群れ），a cluster of buildings（建物の集まり），a cluster of tourists（旅行者の集団）などである．2008 年春に，私と伊山修さんで行きつけの中華料理屋で cluster algebra の訳語を考え，「群」と「集まり」はすでに他の意味があるので「団代数」が適当ではないかということになった．本特集のタイトルでもこの訳語を用いたが，各記事においては訳語の選択は執筆者に委ねたことをお断りする．ちなみに，google で「クラスター」を検索すると「環境ナノクラスター，食クラスター，健康・医療クラスター」などの意味不明語が続出するが，これらは中央官庁の傘下団体の事業名である．

（なかにし・ともき，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

団代数ことはじめ



中西 知樹

本稿は，団代数（cluster algebra）を初めて学ぶ方を対象とした団代数の入門編です．

1. はじめの一歩！

何はともあれ，とりあえず以下のような計算をしてみましょう（鉛筆を持って，ご一緒に！）．

$x_1(0), x_2(0)$ という 2 つの変数から始めます，0 というのは時刻 $t=0$ における変数という意味です．時間は離散的に進むものとして，時刻 $t=1$ における変数 $x_1(1), x_2(1)$ の発展規則を，関係式

$$\begin{aligned} &x_1(1) = (x_2(0)+1)/x_1(0), \\ &x_2(1) = x_2(0) \end{aligned} \tag{1}$$

で定めます．以下では簡単のため，「初期変数」$x_1(0), x_2(0)$ を x_1, x_2 と書くことにしましょう．

次に，時刻 $t=2$ における変数 $x_1(2), x_2(2)$ の発展規則を，2 つの変数の役割を入れ替えて，

$$\begin{aligned} &x_1(2) = x_1(1), \\ &x_2(2) = (x_1(1)+1)/x_2(1) \end{aligned} \tag{2}$$

と定めます．ここで，$x_1(2), x_2(2)$ を初期変数 x_1, x_2 で表すと（ご一緒に！），

$$\begin{aligned} x_1(2) &= x_1(1) = (x_2+1)/x_1, \\ x_2(2) &= (x_1(1)+1)/x_2(1) \\ &= ((x_2+1)/x_1+1)/x_2 \\ &= (x_1+x_2+1)/x_1x_2 \end{aligned}$$

となります．

以下，変数発展規則 (1), (2) を交互に繰り返すことにします．そして，順次得られる変数 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を初期変数 x_1, x_2 の有理式で表してみます．例えば（ここからの計算が肝心！），

$$\begin{aligned} x_1(3) &= (x_2(2)+1)/x_1(2) \\ &= \frac{(x_1+x_2+1)/x_1x_2+1}{(x_2+1)/x_1} \\ &= \frac{(x_1x_2+x_1+x_2+1)/x_1x_2}{(x_2+1)/x_1} \\ &= (x_1+1)/x_2. \end{aligned}$$

ここで，最後の等式で，分子の因数分解 $(x_1x_2+x_1+x_2+1)=(x_1+1)(x_2+1)$ の結果，因子 x_2+1 がキャンセルして，随分簡単な結果になったことに注意します．一方，

$$x_2(3) = x_2(2) = (x_1+x_2+1)/x_1x_2$$

となります．

さらに続けて（あと少し！），

$$\begin{aligned} x_1(4) &= x_1(3) = (x_1+1)/x_2, \\ x_2(4) &= (x_1(3)+1)/x_2(3) \\ &= \frac{(x_1+1)/x_2+1}{(x_1+x_2+1)/x_1x_2} \\ &= \frac{(x_1+x_2+1)/x_2}{(x_1+x_2+1)/x_1x_2} = x_1. \end{aligned}$$

ここでも，分母と分子のキャンセルによって，結果が簡単になりました．最後にもう一度時間発展させると，再び分母と分子のキャンセルが起こり，

$$
\begin{aligned}
x_1(5) &= (x_2(4)+1)/x_1(4) \\
&= \frac{x_1+1}{(x_1+1)/x_2} = x_2, \\
x_2(5) &= x_2(4) = x_1,
\end{aligned}
$$

となります．すなわち

$$
x_1(5) = x_2(0), \quad x_2(5) = x_1(0) \tag{3}
$$

となり，変数は順序を変えて初期変数に戻りました．すなわち，この時間発展の規則は半周期 5 を持つことがわかりました．

実は，この計算は最も簡単で非自明な団代数である A_2 **型団代数**の団変数の変異の計算に他なりません．そして，この初等的ですがミステリアスな計算には，団代数のエッセンスが詰まっています．それを説明するためにいくつか団代数の用語を導入します．各時刻 t における変数の組 $(x_1(t), x_2(t))$ を**団**（cluster），それぞれの変数 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を**団変数**（cluster variable）と呼び，特に，時刻 $t=0$ における団変数 x_1, x_2 を**初期団変数**（initial cluster variable）と呼びます．また，団の時間発展 $(x_1(t), x_2(t)) \mapsto (x_1(t+1), x_2(t+1))$ を団の**変異**（mutation）と呼びます．

そこで，上の計算を振り返ってみましょう．

(i) 変異の対合性． 上の計算では，団の変異として 2 種類の変換 (1), (2) を交互に行いましたが，例えば同じ変換 (1) を続けて行うと，

$$
\begin{aligned}
x_1(2) &= (x_2(1)+1)/x_1(1) \\
&= \frac{x_2+1}{(x_2+1)/x_1} = x_1, \\
x_2(2) &= x_2(1) = x_2,
\end{aligned}
$$

すなわち，変換 (1) を 2 度続けて行うと恒等写像となります．これを変異の**対合性**（involutiveness）と呼びます．

(ii) Laurent 性． 一般に，多変数の簡約された有理式において，その分母が単項式となるものを Laurent 多項式といいます．例えば，

$$
\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}
$$

は x_1, x_2 の Laurent 多項式です．さて，変換 (1), (2) は有理変換（有理式で定められる変換）ですから，任意の t に対して，$x_1(t)$, $x_2(t)$ が初期団変数 x_1, x_2 の有理式となるのは明らかです．しかし，実際には分母分子の非自明なキャンセルが常にうまく起こり，$x_1(t)$, $x_2(t)$ は x_1, x_2 の Laurent 多項式となりました．これを団変数の **Laurent 性**（Laurent property）と呼びます．

(iii) 分母ベクトルとルートの関係． 良く観察をすると，初期団変数 x_1, x_2 を除いて，団変数は以下のちょうど 3 つの Laurent 多項式

$$
\frac{x_2+1}{x_1}, \quad \frac{x_1+1}{x_2}, \quad \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} \tag{4}
$$

しかないことがわかります．これらの Laurent 多項式の分母に現れる単項式 x_1, x_2, x_1x_2 のベキをベクトル α_1, α_2, $\alpha_1+\alpha_2$ と同一視して，これを**分母ベクトル**（denominator vector）と呼びます．これらの分母ベクトルは A_2 型のルート系の正ルートと一対一に対応しています．

(iv) 正値性． 初期団変数を除く団変数に現れる 3 つの Laurent 多項式 (4) の分子は正係数の多項式となっています．この事実を団変数の**正値性**（positivity）といいます．変換 (1), (2) 自身は正係数の有理式ですが，これは非自明な結果です．なぜなら，正係数の有理式の分母分子のキャンセルをして得られる簡約された有理式は必ずしも正係数とは限らないからです．例えば，

$$
\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1+x_2} = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2
$$

となります．

(v) 有限性． 団変数の周期性 (3) も特筆すべき結果です．この周期性は，五角形と関係していて**ペンタゴン恒等式**と呼ばれることがあります．この周期性より，この後時間発展を延々と繰り返しても，有限個の団変数しか現れないという有限性が得られます．

これらの結果は，それだけでは，必然なのか，あるいは偶然の集積なのかは定かではありません．しかし，Fomin と Zelevinsky は，このような結果の背後にある種の代数的・組合せ論的構造が存在することを見抜き，それを団代数として定式化



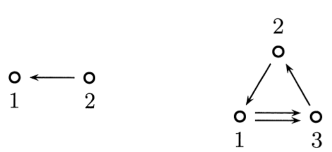
図 1　ループと 2 サイクル．

したのでした．参考のため，Fomin, Zelevinsky, および Berenstein による団代数に関する一連の基礎的な論文のリスト[1,2,4~7]を文末に，挙げておきます．また，団代数についての文献を含めたさまざまな情報は Fomin 自身が編集しているウェブサイト「Cluster Algebras Portal[3]」で得ることができます．

2. 箙とその変異

団代数における「いろは」として次に知っておくべきものとして，「箙（えびら）の変異」というものがあります．これを説明しましょう．

頂点の集合とそれらの間の矢の集合からなる有効グラフを**箙**（quiver，クイバー）と呼びます．箙の頂点には $1, \ldots, n$ と番号が振られているものとします．例えば，以下のようなものが箙の簡単な例です．



箙において，始点と終点が同じ矢を**ループ**と呼び，また，異なる頂点 i, j に対して，i から j に向かう矢とその逆向きの矢のペアを **2 サイクル**と呼びます（図 1）．

定義． ループと 2 サイクルを持たない箙 Q と Q の頂点 k に対して，以下の操作で得られる新しいループと 2 サイクルを持たない箙 Q' を頂点 k における Q の**変異**（mutation）と呼び，$Q' = \mu_k(Q)$ と表します．
（ステップ 1） k と異なる任意の 2 頂点 i, j に対して，i から k への矢が p 個，k から j への矢が q 個あるとき，i から j への pq 個の矢を Q に加える．
（ステップ 2） k に出入りするすべての矢の向きを逆にする．
（ステップ 3） ステップ 1 で発生した 2 サイクルを取り得る限り取り除く．

例えば，先に挙げた例の右側の箙に対して，頂点 1 における変異は図 2 のようになります．一般に，箙の変異が対合的，すなわち，$\mu_k^2(Q) = Q$ となることが容易に確かめられます．

話が少しそれますが，団代数の圏化の理論などでも著名な Bernhard Keller 氏による，箙の変異をコンピュータで実行するための Quiver Mutation[8]というシンプルですが大変高機能なフリーのアプリケーションがあります．このプログラムは箙の変異だけでなく，団代数のさまざまな演算（多くの場合手で実行することは難しい）を行えるため，団代数の研究者必携といえるものです．

さて，ループと 2 サイクルを持たない n 個の頂点を持つ箙 Q に対して，n 次反対称（整数）行列 $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ を

$$b_{ij} = (\text{頂点 } i \text{ から頂点 } j \text{ への矢の数}) - (\text{頂点 } j \text{ から頂点 } i \text{ への矢の数})$$

により定めることができます（以下では，行列は常に整数行列とします）．逆に，n 次反対称行列 B に対して，n 個の頂点を考え，$b_{ij} > 0$ のとき頂点 i から頂点 j へ b_{ij} 本の矢を書くことによりループと 2 サイクルを持たない箙 Q が定まり，しかも，これが上の対応の逆対応を与えることが簡単にわかります．すなわち，ループと 2 サイクルを持たない箙と反対称行列を同一視することができます．

このとき，箙の変異 $Q' = \mu_k(Q)$ に対応して，反対称行列の変異 $B' = \mu_k(B)$ が定まりますが，それを具体的に式で表すと以下のようになります．

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & i = k \text{ または } j = k, \\ b_{ij} + [b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[-b_{kj}]_+, & i, j \neq k. \end{cases} \tag{5}$$

ただし，記号 $[\ ]_+$ を，$a > 0$ に対しては $[a]_+ = a$，$a \leq 0$ に対しては $[a]_+ = 0$ と定めました．

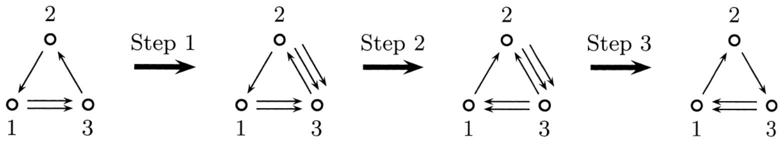


図 2　箙の変異の例.

3. 種子とその変異

Fomin と Zelevinsky[4)] に従って, 団代数における中心的な概念である種子とその変異を導入します.

前節では反対称行列とその変異を導入しましたが, ここではもう少し一般に, 反対称行列 B と非負対角行列 D の積 DB で表せる行列（**反対称化可能行列**という）を考え, 反対称化可能行列 B に対してもその変異 $B' = \mu_k(B)$ を同じ式 (5) によって定めます. すると, B' もまた反対称化可能行列となることが簡単に確かめられます.

さて, 団代数を定義するにあたって, はじめに自然数 n を固定し, n 個の代数的に独立で可換な変数の組 $w = (w_i)_{i=1}^n$ を用意し, w の生成する $\mathbb{Q}$ 上の有理関数体 $\mathbb{Q}(w)$ を考えます. そして, 任意の反対称化可能行列 B および $\mathbb{Q}(w)$ の代数的に独立な n 個の元の組 $x = (x_i)_{i=1}^n$ のペアを**種子** (seed) と呼びます. また, 任意の $k = 1, \ldots, n$ に対して, k における**種子の変異** $(B', x') = \mu_k(B, x)$ を, B' については (5) で定まる $B' = \mu_k(B)$ によって, また $x' = (x'_i)_{i=1}^n$ については

$$x'_i = \begin{cases} \dfrac{1}{x_k}\left(\displaystyle\prod_{j=1}^n x_j^{[b_{jk}]_+} + \prod_{j=1}^n x_j^{[-b_{jk}]_+}\right), & i = k, \\ x_i, & i \neq k \end{cases} \tag{6}$$

と定めます. ただし, 積が空のときは 1 とみなします. このとき, 種子の変異に対しても対合性 $\mu_k^2 = \mathrm{id}$ が成り立ちます. したがって, x'_i たちも代数的に独立であり, 特に, (B', x') は再び種子になります.

各種子 (B, x) に対して, B を**交換行列** (exchange matrix), x を**団** (cluster), また個々の有理式 x_i を**団変数** (cluster variable) と呼びます. また, 関係式 (6) を団 x の**交換関係式** (exchange relation) と呼びます. 交換行列 B が (B, x) から (B', x') への種子の変化の情報を含有しているので, 言わば細胞における「DNA」の役割を担っています. そして, 種子の変化の際に DNA である B 自身もまた部分的に変化をするので, Fomin と Zelevinsky はこれを生物学における種の変化に例えて「変異」と呼んだのです.

4. 団代数の定義

以上で団代数を定義する準備ができました. 一つの団代数を定めるためには, まず任意に種子 (B^0, x^0) を一つ固定して, これを**初期種子** (initial seed) と呼びます. そして, 初期種子 (B^0, x^0) からあらゆる変異を繰り返して得られる種子全体の集合を $\mathcal{S}(B^0, x^0)$ とおき, $\mathcal{S}(B^0, x^0)$ に属するすべての種子 (B, x) の団変数全体の集合を $\mathcal{X}(B^0, x^0)$ とおきます, 一般に, $\mathcal{X}(B^0, x^0)$ は無限集合になります. そして, $\mathcal{X}(B^0, x^0)$ に属するすべての団変数で生成される $\mathbb{Q}(w)$ の $\mathbb{Z}$ 部分代数 $\mathcal{A}(B^0, x^0)$ を, (B^0, x^0) の定める**団代数** (cluster algebra) と呼びます. また, $\mathcal{S}(B^0, x^0)$ に属する種子 (B, x) および $\mathcal{X}(B^0, x^0)$ に属する団変数を, それぞれ, 団代数 $\mathcal{A}(B^0, x^0)$ の種子および団変数と呼びます (応用上は団代数の係数環 $\mathbb{Z}$ を適当な体に拡大することも良くあります).

以上をまとめると, 団代数とは「変異によって特徴付けられる特殊な関係式をみたす生成元を有する可換代数」と言うことができます.

なお, はじめに用意する変数の組 w と初期変数 x^0 を同じものとしても (団代数の同型の下では) 一般性を失いませんので, 通常ははじめから $w = x^0$ としても構いません (ここでもそうします).

簡単な例を見てみましょう．

例 1（A_1 型団代数）．最も簡単な場合として $n=1$ の場合を考えます（n を団代数のランクと呼びます）．次数 1 の対称化可能行列はゼロ行列 (0) のみで，これはただ一つの頂点からなる箙

$$\overset{\circ}{1}$$

に対応します．この箙は A_1 型の Dynkin 図とも見なせることに注意します．このとき，初期種子 $(B^0, x^0) = ((0), (x_1^0))$ の変異は $(B', x') = \mu_1(B^0, x^0)$ の一通りで，

$$B' = (0), \quad x_1' = 2/x_1^0$$

となります．さらに $\mu_1^2 = \mathrm{id}$ でしたから，変異を繰り返してもこれ以上新しい種子は得られません．したがって，

$$\mathcal{X}(B^0, x^0) = \{x_1^0, 2/x_1^0\},$$
$$\mathcal{A}(B^0, x^0) = \mathbb{Z}[x_1^0, 2/x_1^0] \subset \mathbb{Q}(x_1^0),$$

すなわち，$\mathcal{A}(B^0, x^0)$ の元は初期団変数 x_1^0 の $\mathbb{Z}$ 上の Laurent 多項式で負べキの係数が偶数のものとなります．これを A_1 **型団代数**と呼びます（例えば係数を $\mathbb{Q}$ に拡大すると，ただの x_1^0 の $\mathbb{Q}$ 上の Laurent 多項式環になります）．

例 2（A_2 型団代数）．次に $n=2$ として，以下の初期交換行列

$$B^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合を考えます．これは以下の箙

$$\underset{1}{\circ} \longleftarrow \underset{2}{\circ}$$

に対応します．この箙の台グラフ（矢印の向きを忘れたグラフ）は A_2 型の Dynkin 図となります．初期種子 (B^0, x^0) を $(B(0), x(0))$ と表し，以下のような変異の列を考えます．

$$\cdots \overset{\mu_1}{\longleftrightarrow} (B(-1), x(-1)) \overset{\mu_2}{\longleftrightarrow} (B(0), x(0)) \overset{\mu_1}{\longleftrightarrow}$$
$$(B(1), x(1)) \overset{\mu_2}{\longleftrightarrow} (B(2), x(2)) \overset{\mu_1}{\longleftrightarrow} \cdots$$

すると，(5) より（あるいは箙の変異より），

$$B(t) = \begin{cases} B(0), & t\text{: 偶数}, \\ -B(0), & t\text{: 奇数} \end{cases}$$

となります，さらに，これと (6) より，t が偶数のときは，

$$x_1(t+1) = (x_2(t)+1)/x_1(t),$$
$$x_2(t+1) = x_2(t),$$

また，t が奇数のときは，

$$x_1(t+1) = x_1(t),$$
$$x_2(t+1) = (x_1(t)+1)/x_2(t)$$

となります．ところで，これは第 1 節で考えた発展規則 (1), (2) に他なりません．したがって，第 1 節の結果 (3) により，上の種子の変異の列は半周期 5

$$x_1(t+5) = x_2(t), \quad x_2(t+5) = x_1(t)$$

を持つことがわかります．特に，$\mathcal{S}(B^0, x^0)$ に属する種子は有限個（10 個）であり，$\mathcal{X}(B^0, x^0)$ に属する団変数は，

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \frac{x_2^0+1}{x_1^0}, \quad \frac{x_1^0+1}{x_2^0}, \quad \frac{x_1^0+x_2^0+1}{x_1^0 x_2^0}$$

の 5 個となります．これらで生成される団代数 $\mathcal{A}(B^0, x^0)$ を A_2 **型団代数**と呼びます．

5. 団代数の基本性質

第 1 節で見た性質，すなわち A_2 型団代数における変異の性質が，一般の団代数においてどのように成り立つかについて概観します．

(i) 変異の対合性．これは種子の変異の定義のところで述べたように，常に成り立ちます．

(ii) Laurent 性[4]**．**これも常に成り立ちます．すなわち，任意の団変数 x_i を，初期団変数 x^0 の有理式で表したとき，その有理式は Laurent 多項式に簡約されます．実際，Fomin と Zelevinsky は，この性質を手がかりに種子の変異の定義に到達したと思われます．

(iii) 分母ベクトルとルートの関係[5]**．**反対称化可能行列 B に対して，B **に付随する Cartan 行列** $C(B) = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ を

$$c_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j, \\ -|b_{ij}|, & i \neq j \end{cases}$$

と定めます．$C(B)$ は Kac–Moody 代数における対称化可能（一般）Cartan 行列となります．例えば，前節の 2 つの例では，$C(B)$ は，

$$(2), \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となり，それぞれ，A_1 型，A_2 型の（有限型）Cartan 行列となります．一般に，$C(B^0)$ が有限型 Cartan 行列のとき，$\mathcal{A}(B^0, x^0)$ の（初期団変数を除く）任意の団変数の初期団変数に関する分母ベクトルは $C(B^0)$ に対応するルート系の正ルートとなり，さらに，分母ベクトルと正ルートは一対一に対応することが知られています．これは，団代数とルート系あるいは Lie 理論との強い親和性を示すものです．一方で，これは $C(B^0)$ が有限型のときの特殊な性質であることも知られていて，一般の場合には分母ベクトルの挙動はまだよくわかっていません．

(iv) 正値性．「任意の団変数の初期団変数に関する Laurent 多項式表示の分子は正係数となる」という予想は正値性予想と呼ばれ，団代数の基礎理論における当初からの懸案問題となっています．最近，Lee と Schiffler によって B^0 が反対称行列の場合については予想が正しいことが示され一歩前進をしました．

(v) 有限性[5]**．**反対称化可能行列 B と B' が互いに有限回の変異で移り合うとき，B と B' は**変異同値**（mutation equivalent）であるといいます．$\mathcal{A}(B^0, x^0)$ の種子が有限個であるための必要十分条件は，ある反対称化可能行列 B が存在し，B は B^0 と変異同値で，かつ Cartan 行列 $C(B)$ が有限型になることです．変異同値な反対称化可能行列の定める団代数は（団代数の意味で）同型とな

るので，結局，有限型団代数の同型類の分類は良く知られた有限型ルート系の分類と一致する，という著しい結果が得られます．

6. 背景と他分野との関わり

団代数は，もともと Lie 理論においていろいろな文脈で現れる代数的・組合せ論的構造を動機として導入されました．Fomin と Zelevinsky は，その第一論文[4)]で団代数の導入の背景として具体的に（互いに関係する）以下の事柄を挙げています．

- SL_n やその商群の座標環の標準基底，あるいは量子群の双対標準基底．
- Grassmann 多様体 $Gr_{2,n+3}$ の Plücker 座標．
- 半単純群の二重 Burhat 胞体の全正値基底（Lusztig の全正値性と関連）．

そして，これらの事象を半単純群に付随するさまざまな代数多様体へと一般化することを大きな目標として掲げました．

その後，団代数（あるいは関連する代数的・組合せ論的構造）は，もともとの想定を超えて，さまざまな数学の分野と関わることが明らかになってきました．以下に，関連する分野のキーワードの一部を内容的重複をいとわずランダムに箇条書きします（分野の分類は，団代数の出現が多岐にわたることを示すための便宜的なものに過ぎません）．

——**代数的分野**

- 箙あるいは道代数の表現論と圏化，Auslander–Reiten 理論，2 次元 Calabi–Yau 圏．
- 前射影代数の表現論，極大ベキ単部分群，Kac–Moody 群．
- 量子群の表現論，箙多様体上の偏屈層．
- Ginzburg 次数付き微分代数，3 次元 Calabi–Yau 圏，安定性条件，Donaldson–Thomas 不変量．

——**幾何的分野**

- Stasheff ポリトープ，Bott–Taubes ポリトープ．
- Poisson 幾何学，Poisson–Lie 構造，Coxeter–Toda 格子．
- 2 次元双曲幾何：Riemann 面の三角形分割，ラムダ長，複比，Ptolemy の定理，Teichmüller 理論とその高次化，Weil–Peterson 形式．
- 3 次元双曲幾何：双曲体積．
- 結び目理論：組紐関係式，スケイン関係式．

——**解析的分野**

- ダイログ関数と量子ダイログ関数．
- KP 階層のソリトングラフ．
- 完全 WKB 解析，Stokes 現象．

——**組合せ論，数理物理**

- Gale–Robinson 数列，六面体数列，八面体数列，Somos 数列などの数論的・組合せ論的数列．
- ダイマー模型．
- 共形場理論：Y 系，T 系，Q 系，熱力学的 Bethe 仮説．
- 弦理論：BPS 状態の数え上げ，Hitchin 系．

7. 係数（y 変数）

最後に，団代数の理論および応用において団変数と並んで重要な係数（y 変数）について簡単に紹介してこの短い入門編を終えたいと思います．

初期団変数 $x^0=(x_i^0)_{i=1}^n$ とは独立に，あらたに n 個の可換な変数の組 $y^0=(y_i^0)_{i=1}^n$ を導入します．そして，種子 (B,x) とパラレルに，n 次反対称化可能行列 B および n 個の変数の組 $y=(y_i)_{i=1}^n$, $y_i\in\mathbb{Q}(y^0)$ のペア (B,y) を考え，これを Y **種子**（Y-seed）と呼びます．任意の $k=1,\dots,n$ に対して，Y 種子 (B,y) の k における変異 $(B',y')=\mu_k(B,y)$ を，B' については (5) によって定め，y' については

$$
y_i'=\begin{cases} {y_k}^{-1}, & i=k,\\ y_k\dfrac{(1+y_k)^{[-b_{ki}]_+}}{(1+{y_k}^{-1})^{[b_{ki}]_+}}, & i\neq k \end{cases} \tag{7}
$$

と定めます．Y 種子の変数 y_i を**係数**（coefficient）あるいは y **変数**と呼びます（正確には，係数と言うときには，団変数 x_i の変異 (6) の式に y 変数も「係数」として絡んでくるのですが，ここでは，その詳細は省略します）．後は，団変数の場合と同様に，初期 Y 種子 (B^0,y^0) から出発し，上の変

異を繰り返して得られる y 変数を考えます.

y 変数はもともとは団変数（x 変数）に対する「係数」という補助的な位置づけとして導入されましたが，その後，x 変数と y 変数の間の双対性の認識が深まり，x 変数と対等な位置づけを得るとともに，応用においてもむしろ主役となることがあるなど，その重要性は増しています.

最後になりますが，x 変数に対して，$\hat{y}$ 変数 $\hat{y} = (\hat{y}_i)_{i=1}^n$ を

$$\hat{y}_i = \prod_{j=1}^{n} x_j^{b_{ji}} \tag{8}$$

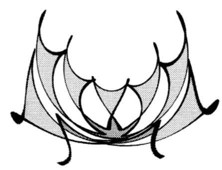
と定めると，$\hat{y}$ は y と同じ変異規則 (7) に従います．これは x 変数と y 変数の間のある種の双対性を示すものです．この事実は (5) と (6) のみから示せますので，復習を兼ねてぜひ確かめてみてください.

参考文献

1) A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, Cluster algebras III: upper bounds and double Bruhat cells, *Duke Math. J.* **126** (2005), 1–52; arXiv:math/035434 [math.RT].
2) A. Berenstein and A. Zelevinsky, Quantum cluster algebras, *Adv. in Math.* **195** (2005), 405–455; arXiv:math.QA/0404446.
3) S. Fomin, Cluster Algebras Portal, http://www.math.lsa.umich.edu/~fomin/cluster.html.
4) S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras I: Foundations, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), 497–529 (electronic); arXiv:math/0104151 [math.RT].
5) ———, Cluster algebras II: Finite type classification, *Invent. Math.* **154** (2003), 63–121; arXiv:math/0208229 [math.RA].
6) ———, Y-systems and generalized associahedra, *Ann. of Math.* **158** (2003), 977–1018; arXiv:hep-th/0111053.
7) ———, Cluster algebras IV: Coefficients, *Compositio Mathematica* **143** (2007), 112–164; arXiv: math/0602259 [math.RT].
8) B. Keller, Quiver mutation in Java, http://people.math.jussieu.fr/~keller/quivermutation/.

（なかにし・ともき，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

団代数と傾理論，団傾理論



伊山　修

箙とは点と矢からなる有向グラフであり，本稿を通して箙 Q は n 個の点 $1, 2, \ldots, n$ を持つとする．Q から**団代数**と呼ばれる可換代数 $\mathcal{A}_Q$ が定まる[*1]（中西氏の記事では $\mathcal{A}(B^0, x^0)$ と表されている）．それは**団変数**で生成される，有理関数体 $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ の部分代数であった．

変異を繰り返して定義された団代数を，帰納的ではなく大域的，概念的に理解する方法はないだろうか？ この問いに対する一つの解答が，本稿で扱う団代数の**圏化**である[*2][*3]．この主題に関しては英文の優れた解説記事12, 15) もあるので，さらに興味を持った読者は参照されたい．

以下の3種類のグラフを（有限型）**Dynkin 図形**と呼び，その辺を矢で置き換えて得られる箙を **Dynkin 箙**と呼ぶ[*4]．

A_n $(n \geq 1)$　○－○－○－ ⋯ －○－○－○

D_n $(n \geq 4)$　○－○－○－ ⋯ －○－○（左から2番目の○にもう一つの○が上に接続）

E_n $(n = 6, 7, 8)$　○－○－○－ ⋯ －○－○（左から3番目の○にもう一つの○が上に接続）

例えば A_3 型の Dynkin 箙は，以下の4種類である．

$$1 \to 2 \to 3, \quad 1 \to 2 \leftarrow 3, \quad 1 \leftarrow 2 \to 3, \quad 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3.$$

Dynkin 図形は，様々な数学に現れる古典的 “共通構造” の骨子である．今世紀に現れた新たなる共通構造である団代数も，次の定理が示すように Dynkin 図形と関係がある．団変数を有限個しか持たない団代数を**有限型**と呼ぶ．

定理 1（Fomin–Zelevinsky）7)．団代数 $\mathcal{A}_Q$ が有限型である必要十分条件は，Q が Dynkin 箙であることである．このとき $\mathcal{A}_Q$ の非初期団変数と，Q の正ルートの間に全単射が存在する．

ここで**非初期団変数**とは，初期団変数以外の団変数のことである．また Dynkin 箙 Q の**正ルート**とは，Q に付随する2次形式

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i \to j} x_i x_j$$

に対し，非負整数を成分とするベクトル $d = (d_i)_{i=1}^n$ で $q(d) = 1$ を満たすものである．

団代数の Laurent 性（中西氏の記事参照）より，団変数はすべて初期変数 $x_1, \ldots, x_n$ の Laurent 多項式で表されるが，定理1の全単射は，$\mathcal{A}_Q$ の非初期団変数の分母 $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$ に対して，ベクトル $(d_i)_{i=1}^n$ を対応させるものである．

実際に Dynkin 箙 $1 \leftarrow 2 \to 3$ で確かめてみよう．付随する2次形式は

---

*1）本稿では反対称行列に付随する団代数のみ扱う．

*2）**圏論化**ともいう．本稿で扱う圏化は**加法的圏化**とも呼ばれる．木村氏の記事で扱う**モノイダル圏化**とは異なるが，これらの関係を明らかにすることは興味深い課題である．

*3）反対称化可能行列に付随する団代数に対しても，Demonet 氏らによって圏化が調べられている．

*4）箙を一般化した species を考えると，B_n, C_n, F_4, G_2 と呼ばれる Dynkin 図形が現れる．それらは反対称化可能行列に付随する団代数に対応する．

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3$$

なので，Q は以下の 6 個の正ルートを持つ．

$$(1,0,0) \quad (0,1,1) \quad (1,1,1) \quad (0,1,0) \quad (0,0,1) \quad (1,1,0)$$

一方 $\mathcal{A}_Q$ は以下の 6 個の非初期団変数を持つ．

$$\frac{1+x_2}{x_1} \quad \frac{1+x_2+x_1x_3}{x_2x_3} \quad \frac{1+2x_2+x_2^2+x_1x_3}{x_1x_2x_3} \quad \frac{1+x_1x_3}{x_2} \quad \frac{1+x_2}{x_3} \quad \frac{1+x_2+x_1x_3}{x_1x_2}$$

確かに全単射となっていることが分かるだろう．

定理 1 は，次節で述べる箙の表現に関する Gabriel の定理 2 に類似している．この観察が本稿の主題である団代数の圏化の出発点である．

1. 箙の表現

箙の表現に関する詳細は，教科書 2) が便利である．以下，代数閉体 k（例えば複素数体 $\mathbb{C}$）と箙 Q を固定する．

Q の各点 i に有限次元 k ベクトル空間 V_i を対応させ，さらに Q の各矢 $a: i \to j$ に線形写像 $V_a: V_i \to V_j$ を対応させたもの $V = (V_i, V_a)$ を Q の**表現**と呼ぶ．V の**次元ベクトル**を，$\underline{\dim} V := (\dim_k V_i)_{i=1}^n$ により定める．

Q の表現 $V = (V_i, V_a)$ と $W = (W_i, W_a)$ の間の**射** $f = (f_i)_{i=1}^n : V \to W$ とは，Q の各点 i に対する線形写像 $f_i : V_i \to W_i$ で，各矢 $a: i \to j$ に対して以下が可換となるものである．

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{V_a} & V_j \\ \downarrow f_i & & \downarrow f_j \\ W_i & \xrightarrow{W_a} & W_j \end{array}$$

f が**同型**であるとは，各 f_i が同型であることである．Q の表現とは，**道代数**[9] と呼ばれる k 代数 kQ 上の加群に他ならない．実際，Q の表現の圏は，k 上有限次元であるような kQ 加群の圏 $\mathsf{mod}(kQ)$ と同値となる．特に，加群に関する基本的な諸性質が，Q の表現に対しても成立する．

Q の表現 $V = (V_i, V_a)$ と $W = (W_i, W_a)$ の**直和**は，$V \oplus W = (V_i \oplus W_i, V_a \oplus W_a)$ により与えられる．0 でない 2 つの表現の直和と同型にならない表現を，**直既約**と呼ぶ．Q の任意の表現は，有限個の直既約表現の直和と同型となり，さらにそれらの直既約表現は同型を除いて一意的に定まる（**Krull–Schmidt の定理**）[2]．このことから直既約表現は，表現を構成する基本単位と考えることができる．有限個しか直既約表現を持たない箙は，**有限表現型**と呼ばれ，その分類は次で与えられる．

定理 2（Gabriel）[2]．箙 Q が有限表現型である必要十分条件は，Q が Dynkin 箙であることである．このとき Q の直既約表現の同型類と，Q の正ルートの間の全単射が，$V \mapsto \underline{\dim} V$ で与えられる．

例えば箙 $1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$ は，以下の 6 個の直既約表現を持つ．

$$(k \leftarrow 0 \rightarrow 0) \quad (0 \leftarrow k \xrightarrow{1} k) \quad (k \xleftarrow{1} k \xrightarrow{1} k) \quad (0 \leftarrow k \rightarrow 0) \quad (0 \leftarrow 0 \rightarrow k) \quad (k \xleftarrow{1} k \rightarrow 0)$$

前節で求めた正ルートと一対一に対応していることが分かるだろう．

定理 1 と定理 2 を組み合わせることにより，Dynkin 箙 Q に対して全単射

$$\{Q \text{ の直既約表現の同型類}\} \xrightarrow{\sim} \{\mathcal{A}_Q \text{ の非初期団変数}\} \quad (1)$$

が得られる．Caldero–Chapoton はこれを精密化し，箙の表現から団変数を直接構成する方法を与えた．

箙 Q の表現 $V = (V_i, V_a)$ の次元ベクトルを $d = (d_i)_{i=1}^n$ とする．ベクトル $e = (e_i)_{i=1}^n$ で，各 i に対して $0 \le e_i \le d_i$ を満たすものに対し，グラスマン多様体の直積 $\prod_{i=1}^n \mathrm{Gr}_{e_i}(V_i)$ を考える．その閉部分多様体

$$\mathrm{Gr}_e(V) := \{(U_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n \mathrm{Gr}_{e_i}(V_i) \mid Q \text{ の任意の矢 } a: i \to j \text{ に対し } V_a(U_i) \subset U_j\}$$

を**箙グラスマン多様体**と呼び，そのオイラー標数を $\chi(\mathrm{Gr}_e(V))$ で表す．

定理 3 (Caldero–Chapoton)[4]. Dynkin 箙 Q に対して，全単射 (1) は，Q の直既約表現 V に

$$X_V := \frac{1}{x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n}} \times \left(\sum_{0\le e\le d} \chi(\mathrm{Gr}_e(V)) \prod_{i=1}^{n} x_i^{\sum_{j\to i} e_j + \sum_{i\to j}(d_j - e_j)} \right) \quad (2)$$

を対応させるものである．

X_V は V の部分表現を数え上げるものであり，**Caldero–Chapoton 写像**と呼ばれる．このようなオイラー標数による数え上げは表現論の常套手段であり，箙の表現によるリー代数の普遍包絡代数の構成（Ringel–Hall 代数）にも用いられている．

さて，Dynkin でない箙 Q の場合に，定理 3 はどうなるだろうか．Q が（点以外の）有向サイクルを持たないとき**非輪状**と呼ぶが，その場合を考えてみよう．例えば Dynkin 箙はすべて非輪状である．Dynkin でない箙の直既約表現は多すぎるため，特別な表現のみを考えることが，定理 3 を拡張する際の鍵となる．箙 Q の表現 V が **rigid** であるとは，$\mathrm{Ext}^1_{kQ}(V,V)=0$ が成立することである．

定理 4 (Caldero–Keller)[5]. Q を非輪状の箙とする．このとき，Q の rigid な直既約表現の同型類と，団代数 $\mathcal{A}_Q$ の非初期団変数の間の全単射が，(2) によって与えられる．

Dynkin 箙の直既約表現はすべて rigid なので，これは定理 3 を真に拡張したものとなっている．定理 4 の証明には，3 節で述べる団圏に関する諸結果を本質的に用いる必要がある．

定理 4 に関して，いくつかの問いが生じる．

- 非輪状でない箙ではどうか？
- 団代数における団や変異の概念は，箙の表現においてどのような意味を持つか？
- 初期団変数を含めた全単射を構成できないか？

これらを同時に解決するものが，団圏と団傾理論なのだが，それを説明する前に古典的な傾理論から始めねばならない．これは箙の rigid な表現に，圏論的な意味づけを与えるものである．

2. 傾理論

傾理論に関しては，英文の解説記事[10]も参照されたい．Brenner–Butler によって導入された傾加群は，今日では表現論において欠かせないものとなっている．傾加群は，森田理論の基本概念である射影生成元の一般化であり，また，Rickard による導来圏の森田理論における基本概念である傾複体の特別な場合でもある．今日では傾理論は，群（有限群，代数群）の表現論や代数幾何学，ミラー対称性予想をはじめとして，様々な数学で用いられており，環論の持つ普遍性を示す一例となっている．

この節では A を有限次元 k 代数とし，A 加群といえば k 上有限次元であるようなもののみ考える．例えば A は非輪状箙 Q の道代数 kQ である．Krull–Schmidt の定理より，任意の A 加群 X に対して，互いに非同型な直既約加群 $X_1, \ldots, X_m$ と正の整数 $\ell_1,\ldots,\ell_m$ が存在して，X は $X_1^{\ell_1}\oplus\cdots\oplus X_m^{\ell_m}$ と同型になる．このとき $|X| := m$ とおく．X が**基本的**であるとは，$\ell_1 = \cdots = \ell_m = 1$ を意味する．

定義 1. A 加群 T が**部分傾加群**であるとは，次の 2 条件が満たされることである．

- T の射影次元は 1 以下である．
- T は rigid である，つまり $\mathrm{Ext}^1_A(T,T)=0$.

さらに次が満たされるとき，X を**傾加群**と呼ぶ．

- $|T| = |A|(:= n)$.

傾加群の最も基本的な例は，$T = A$ である．傾加群 T に対し，A の導来圏と自己準同型環 $\mathrm{End}_A(T)$ の導来圏の間の同値が与えられる[9]．

以下，A の基本的傾加群の同型類の全体を tilt A で表す．tilt A の組合せ論的な構造は，80 年代終わり頃から着目されていた．傾加群の直和因子は明らかに部分傾加群であるが，逆に任意の部分傾加群 T に対し，T を直和因子に持つ傾加群が存在する (Bongartz)[2]．これより特に $|T| \le |A|$ が従う．

Riedtmann–Schodfield は，傾加群の 1 つの直

既約直和因子を別のものに取り換えることにより，新たな傾加群を構成する手法を定式化した．

定理 5 (Riedtmann–Schofield)[16]． A を有限次元 k 代数とし，$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ を A の基本的な傾加群とする．このとき各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，次の条件を満たす A の直既約加群 T_i^* は，同型を除いて高々 1 つしか存在しない．
- $(T/T_i) \oplus T_i^*$ は A の基本的な傾加群である．
- $T_i^* \not\simeq T_i$.

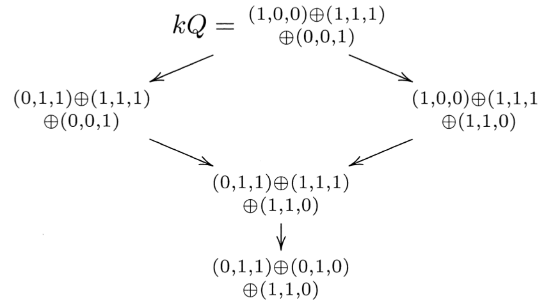
これらの条件を満たす T_i^* が存在するときに，$(T/T_i) \oplus T_i^*$ を T の**変異**と呼び $\mu_i(T)$ と表す．Riedtmann–Schofield は変異という用語を用いていなかったが，彼らよりも少し前に Gorodentsev–Rudakov[8] によって**例外列の変異**という類似した操作が導入されている．傾加群と例外列はいずれも導来圏における基本概念であり，大きな共通部分が存在するが，団代数の組合せ論的構造とより直接的に関係するのは傾加群の変異である．

$T, U \in \operatorname{tilt} A$ に対し，T の直和から U への全射 $T^{\oplus \ell} \to U$ が存在するときに，$T \geq U$ と表す．このとき $(\operatorname{tilt} A, \geq)$ は半順序集合となる．$\operatorname{tilt} A$ は A を最大元に持つ．$\operatorname{tilt} A$ の半順序集合としての構造を図示する **Hasse 箙**を，次で定める．
- $\operatorname{tilt} A$ を点集合とする．
- $T, U \in \operatorname{tilt} A$ が $T > U$ を満たし，さらに $T > V > U$ となる $V \in \operatorname{tilt} A$ が存在しない場合に，矢 $T \to U$ を描く．

これは変異と次のような関係がある．

定理 6 (Happel–Unger)[10]． 有限次元 k 代数 A の 2 つの基本的な傾加群 T, U が変異の関係にある必要十分条件は，Hasse 箙において T と U の間に矢が存在することである．

例えば箙　$1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$　に対して，$\operatorname{tilt} kQ$ の Hasse 箙は以下のようになる．次元ベクトルを用いて kQ 加群を表記している．



この例では $\mu_1(kQ)$ と $\mu_3(kQ)$ は存在するが，$\mu_2(kQ)$ は存在しない．

このように，傾加群 T の直和因子 T_i の選び方によっては $\mu_i(T)$ が存在せず，T を変異することができない．このことは $\operatorname{tilt} A$ の組合せ論的構造が不完全であることを意味する．これを補うために導入されたものが，次節で解説する団圏と団傾対象である．

3. 団傾理論

団代数の団圏による圏化は，Buan–Marsh–Reineke–Reiten–Todorov による著名な論文 3) に始まった．団圏を導入するためには，導来圏から始めなければならない．導来圏に関しては，文献 9, 12) なども参照していただきたい．

Q を非輪状箙とし，$\mathsf{mod}(kQ)$ の有界導来圏を $\mathsf{D}(Q) := \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}(kQ))$ と表す．これは Q の表現のなす有界複体を対象とする三角圏である．複体のシフトを $[1]$ で表す．k 双対 $D = \operatorname{Hom}_k(-, k)$ を kQ に施すことにより，両側 kQ 加群 $D(kQ)$ が得られるが，これから**中山関手**

$$\nu := D(kQ) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{kQ} - : \mathsf{D}(Q) \to \mathsf{D}(Q)$$

を定める．これは $\mathsf{D}(Q)$ の自己同値を与え，また任意の $X, Y \in \mathsf{D}(Q)$ に対し，次の関手的同型（**Auslander–Reiten–Serre 双対性**）が存在する．

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(Q)}(X, Y) \simeq D \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(Q)}(Y, \nu(X)). \quad (3)$$

ここで $\mathsf{D}(Q)$ の自己同値 $\nu_2 := \nu \circ [-2]$ を考える．

定義 2[3]． 団圏 $\mathsf{C}(Q)$ を次のように定める．
- $\mathsf{C}(Q)$ は $\mathsf{D}(Q)$ と同じ対象を持つ．
- $\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}(Q)}(X, Y) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(Q)}(X, \nu_2^i(Y))$.

- $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(Q)}(X,Y)$ および $g = (g_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(Q)}(Y,Z)$ に対し，$g \circ f := (\sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu_2^k(g_{i-k}) \circ f_k)_{i\in\mathbb{Z}}$ により合成を定める．

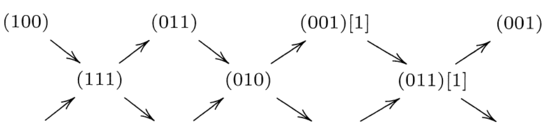
以下，$\mathsf{C}(Q)$ の性質をいくつか与える．

まず，$\mathsf{C}(Q)$ の任意の対象は有限個の直既約対象の直和と同型であり，さらに任意の直既約対象の自己準同型環は局所環である．これらの性質を満たす加法圏を一般に **Krull–Schmidt 圏**と呼ぶが，そこでは直和分解に関する Krull–Schmidt の定理が成立する．Krull–Schmidt 圏の対象 X に対しては，前節の加群の場合と同様にして，$|X|$ および**基本的**という概念が定義される．

次に，自然な関手 $\mathsf{mod}(kQ) \to \mathsf{D}(Q) \to \mathsf{C}(Q)$ を考えることにより，Q の任意の表現は $\mathsf{C}(Q)$ の対象とみなされる．このとき $\mathsf{C}(Q)$ の直既約対象は，以下の 2 種類で与えられる．

- Q の直既約表現 V．
- 各 $i = 1, \ldots, n$ に付随する Q の直既約射影表現 P_i のシフト $P_i[1]$．

Q が Dynkin 箙ならば，定理 2 より 1 種類目の対象は正ルートと一対一に対応する．例えば箙 $1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$ の場合，$\mathsf{C}(Q)$ は 6+3=9 個の直既約対象の同型類を持ち，その構造を与える Auslander–Reiten 箙[9]は以下のようになる．



最後に，$\mathsf{C}(Q)$ の三角圏構造について述べよう．$\mathsf{C}(Q)$ は三角圏の構造を持ち（Keller）[12]，さらに (3) から，任意の $X, Y \in \mathsf{C}(Q)$ に対し，次の関手的同型が存在することが分かる．

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(Q)}(X,Y) \simeq D\,\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(Q)}(Y,X[2]).$$

この性質を満たす三角圏を一般に **2-Calabi–Yau** と呼ぶが，そこでは以下で定義される傾加群の類似物を考えることが重要である．

定義 3. C を Krull–Schmidt 2-Calabi–Yau 三角圏とする．C の対象 T が **rigid** であるとは，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(T, T[1]) = 0$ が成立することである．また，C の rigid な対象 T が次の条件を満たすとき，**団傾対象**（**cluster tilting object**）と呼ぶ．

- 直既約対象 $X \in \mathsf{C}$ が $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(T, X[1]) = 0$ を満たせば，X は T の直和因子と同型である．

例えば非輪状箙 Q に対し，Q の rigid な表現は $\mathsf{C}(Q)$ においても rigid な対象であり，kQ の傾加群は $\mathsf{C}(Q)$ において団傾対象となる[3]．任意の団傾対象 T に対して $|T|$ は一定である（Zhou–Zhu）[10]．

定理 4 は実際には，団圏と団傾対象を用いて，次のように述べられる．

定理 4′（Caldero–Keller）[5]． Q を非輪状箙とし，$\mathsf{C}(Q)$ を団圏とする．このとき，$\mathsf{C}(Q)$ の rigid な直既約対象の同型類と，団代数 $\mathcal{A}_Q$ の団変数の間に全単射が存在する．さらにそれは $\mathsf{C}(Q)$ の基本的な団傾対象の同型類と，$\mathcal{A}_Q$ の団の間の全単射を与える．

次に，団代数における変異の，圏論的な意味付けを考えよう．前節で扱った傾加群の変異は，団傾対象に対しても考えることができる．

定理 7（I.–Yoshino）[11]． C を Krull–Schmidt 2-Calabi–Yau 三角圏とし，$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ を C の基本的な団傾対象とする．このとき各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，次の条件を満たす C の直既約対象 T_i^* が，同型を除いてただ 1 つ存在する．

- $(T/T_i) \oplus T_i^*$ は C の基本的な団傾対象である．
- $T_i^* \not\simeq T_i$．

この定理によって与えられる $(T/T_i) \oplus T_i^*$ を，T の**変異**と呼び，$\mu_i(T)$ と表す．定理 5 と定理 7 を比較すると，傾加群よりも団傾対象のほうが，変異に関する振舞いが良いことが分かるだろう．

さらに団傾対象の変異は，箙の変異にも圏論的な意味づけを与える．箙の**変異**とは団代数の定義に現れるもので，ループと 2 サイクルを持たない箙 Q とその頂点 i から，新しい箙 $\mu_i(Q)$ を構成する操作であった（中西氏の記事参照）．一般に，基本的な有限次元 k 代数 A に対して，箙 Q と道

代数 kQ のイデアル I が存在して，A は剰余代数 kQ/I と同型になる．さらに I は長さ 2 以上の道の線形和で生成されるようできる．このとき Q は一意的に定まり，Q_A と表される．

定理 8 (Buan–I.–Reiten–Scott)[12]．C を Krull–Schmidt 2-Calabi–Yau 三角圏とし，基本的な団傾対象 $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ に対して，$Q_T := Q_{\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(T)}$ とおく．もし Q_T と $Q_{\mu_i(T)}$ がともにループと 2 サイクルを持たないならば，箙の同型 $Q_{\mu_i(T)} \simeq \mu_i(Q_T)$ が存在する．

つまり定理 $4'$ の全単射は，団代数における組合せ論的変異および団圏における圏論的変異と可換性を有するのである．

本稿の最後に，非輪状とは限らない一般の箙 Q に付随する団代数 $\mathcal{A}_Q$ の圏化について簡単に説明しよう．それは Keller スクールによって与えられた*5)．そこでは Q と**ポテンシャル**と呼ばれる道代数 kQ の特別な元 W の組 (Q, W) から定まる **Ginzburg dg 代数** $\Gamma(Q, W)$ が用いられる．Amiot によって $\Gamma(Q, W)$ の導来圏を用いて（一般）**団圏** $\mathsf{C}(Q, W)$ が構成された[1,14]．$\mathsf{C}(Q, W)$ は三角圏であり，上と同様に団傾対象を考えることができ，例えば $\Gamma(Q, W)$ 自身が団傾対象となっている．$\Gamma(Q, W)$ から変異の繰返しで得られる団傾対象を**到達可能**と呼び，その直既約な直和因子を**到達可能**な直既約対象と呼ぶ．次の結果は定理 3, $4'$ の最終形と言える．

定理 9 (Cerulli Irelli–Keller–Labardini-Fragoso–Plamondon)[6]．Q を箙とし，$\mathsf{C}(Q, W)$ を非退化なポテンシャル (Q, W) の団圏とする．このとき，$\mathsf{C}(Q, W)$ の到達可能な直既約対象の同型類と，団代数 $\mathcal{A}_Q$ の団変数の間の全単射が存在する．さらにそれは，$\mathsf{C}(Q, W)$ の到達可能な団傾対象と，$\mathcal{A}_Q$ の団の間の全単射を与える．

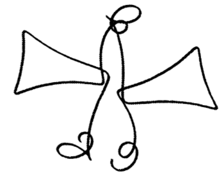
*5) 故・長尾氏による Donaldson–Thomas 不変量による団代数の研究[13]とも，密接な関係がある．

参考文献

1) C. Amiot, On generalized cluster categories, *Representations of algebras and related topics*, 1–53, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.
2) I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol.1. Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
3) A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov, Tilting theory and cluster combinatorics, *Adv. Math.* **204** (2006), no.2, 572–618.
4) P. Caldero, F. Chapoton, Cluster algebras as Hall algebras of quiver representations, *Comment. Math. Helv.* **81** (2006), no.3, 595–616.
5) P. Caldero, B. Keller, From triangulated categories to cluster algebras. II, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **(4) 39** (2006), no.6, 983–1009.
6) G. Cerulli Irelli, B. Keller, D. Labardini-Fragoso, P. Plamondon, Linear independence of cluster monomials for skew-symmetric cluster algebras, to appear in *Compos. Math.*
7) S. Fomin, A. Zelevinsky, Cluster algebras. II. Finite type classification, *Invent. Math.* **154** (2003), no.1, 63–121.
8) A. Gorodentsev, A. Rudakov, Exceptional vector bundles on projective spaces, *Duke Math. J.* **54** (1987), no.1, 115–130.
9) 伊山修，多元環の導来圏入門，「数理科学」(2012), no.590, 21–25.
10) O. Iyama, I. Reiten, Introduction to τ-tilting theory, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **111** (2014), no.27, 9704–9711.
11) O. Iyama, Y. Yoshino, Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules, *Invent. Math.* **172** (2008), no.1, 117–168.
12) B. Keller, Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories, *Triangulated categories*, 76–160, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 375, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
13) K. Nagao, Donaldson-Thomas theory and cluster algebras, *Duke Math. J.* **162** (2013), no.7, 1313–1367.
14) P. Plamondon, Cluster characters for cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces, *Adv. Math.* **227** (2011), no.1, 1–39.
15) I. Reiten, Cluster categories, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians.* Volume I, 558–594, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.
16) C. Riedtmann, A. Schofield, On a simplicial complex associated with tilting modules, *Comment. Math. Helv.* **66** (1991), no.1, 70–78

（いやま・おさむ，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

団代数と結晶基底



中島 俊樹

1. はじめに

早いもので，本誌 1992 年 3 月号に「Crystal base — $q=0$ の世界」という拙文を掲載させて頂いてすでに二十余年が過ぎてしまった．当時はまだ大学院生であり，まだ右も左もわからぬ若輩者であった（それは今も大してかわりないのだけれど…）自分にとって過ぎたる仕事であった．今，当時の記事を目の前にし自分がいかに進歩していないか切々と感じ入っている．一方で，結晶基底（crystal base）の理論はその当時と比べ，現在はるかに広く知られるようになり，その分だけ時間の経過というものを自覚する次第である．

今回の記事では，団代数と結晶基底について何か書けという依頼であったが，はっきり言って私は団代数の専門家ではないのであくまで結晶基底の 1 つの応用という立場で話を展開してみようと思う．この内容の大部分は文献 9) による．

2. 対称群と特殊線型群

まず，先の話のために有名かつ基本的な 2 つの群について復習しておく．

n 次対称群 S_n は，集合 $[1,n]:=\{1,2,\cdots,n\}$ から自分自身への全単射写像のなす集合に写像の合成を積として定義される群であり，通常

$$S_n=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\;\middle|\; \begin{array}{c}\{i_1,\cdots,i_n\}\\ =\{1,\cdots,n\}\end{array}\right\}$$

と標記される．ここでは，別の標記法として次のようなものを採用しよう：

$$S_{n+1}=\langle s_1,s_2,\cdots,s_n\rangle.$$

つまり S_{n+1} は $s_1,\cdots,s_n$ で生成される群ということである．ここで，s_i は隣接互換と呼ばれる元で次の関係式を満たす：$s_i^2=\mathrm{id}$, $s_is_j=s_js_i$ $(|i-j|>1)$, $s_is_{i+1}s_i=s_{i+1}s_is_{i+1}$ $(1\le i\le n-1)$.

ここで対称群 S_{n+1} の元の最短表示について，復習してみよう．対称群の任意の元は上で紹介した隣接互換 $\{s_i\}$ たちの積で表される．1 つの元 $\sigma\in S_{n+1}$ を隣接互換の積で表示する方法は 1 通りとは限らないがその積の個数が最小のとき，その隣接互換の個数を σ の**長さ**といい，$l(\sigma)$ と書き，その表示を**最短表示**と呼ぶ．例えば，$w=s_1s_2s_1s_2$ という元は，上の関係式を用いると $w=(s_2s_1s_2)s_2=s_2s_1s_2^2=s_2s_1$ となって実際の長さは 2 であることがわかる．また，S_n には長さが最大の元が 1 つ存在し，それを最長元と呼ぶ．例えば，

$$\underbrace{1,\cdots,n}_{\text{1st}},\underbrace{1,\cdots,(n-1)}_{\text{2nd}},\cdots,\underbrace{1,2}_{(n-1)\text{th}},\underbrace{1}_{n\text{th}}$$

にそって，s_j を並べた元は S_{n+1} の最長元である．

次に特殊線型群について復習しよう．複素 $n+1$ 次正方行列全体を $M_{n+1}(\mathbb{C})$ と書き，その元 A に対して，$\det(A)$ を A の行列式とする．

$$SL(n+1,\mathbb{C}):=\{A\in M_{n+1}(\mathbb{C})\mid \det(A)=1\}$$

とおき，これを特殊線型群と呼ぶ．この集合が行列の積により群をなすことは行列式の積公式より直ちに導かれる．ここで，

$$B^+ := \{(a_{i,j}) \in SL(n+1, \mathbb{C}) \,|\, a_{i,j} = 0 (i > j)\},$$

$$B^- := \{(a_{i,j}) \in SL(n+1, \mathbb{C}) \,|\, a_{i,j} = 0 (i < j)\}$$

とおくと，B^+, B^- とも $SL(n+1, \mathbb{C})$ の部分群であることは自明．これらを $SL(n+1, \mathbb{C})$ の**ボレル部分群**という．さらに，U^+, U^- をそれぞれ対角成分がすべて 1 である元からなる B^+, B^- の部分集合とすると，これらも $SL(n+1, \mathbb{C})$ の部分群である．これらを**冪単部分群**と呼ぶ．また，$T := B^+ \cap B^-$ は対角行列からなるが，これを**極大トーラス**と呼ぶ．

最後に，対称群と特殊線型群の関係について述べこの節を終えよう．$N := \{g \in SL(n+1, \mathbb{C}) | gTg^{-1} = T\}$ を極大トーラス T の正規化部分群とすると，T は N の正規部分群であるので剰余群 N/T が得られるが，実は $S_{n+1} \cong N/T$ となっている．通常 $\sigma \in S_{n+1}$ の N における代表元を $\overline{\sigma}$ と書くが，特に大きな混乱はないと思われるので代表元も σ と書くこととする．

3. 結晶基底

さて，ここでタイトルにもある結晶基底について紹介しよう．この論説内で，そのすべてについて述べることは難しいので少し簡単にした形で紹介する．本格的に勉強したいという方は文献 3, 6) などをご覧いただきたい．結晶基底は，量子群の表現論と深く関わっているのだが，ここでは公理的に定義してみよう．

自然数 n を 1 つ固定して，A 型カルタン行列 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ と呼ばれるものを次のような整数行列とする：

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2, & i = j, \\ -1, & |i-j| = 1, \\ 0, & |i-j| > 1. \end{cases}$$

定義 1 **(1)** B を集合とし，写像 $\varepsilon_i, \varphi_i, wt_i : B \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$ $(1 \leq i \leq n)$, $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \sqcup \{0\} \to B \sqcup \{0\}$ に対して $(B, \{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, wt_i, \varepsilon_i, \varphi_i\}_{i=1}^n)$ が **A 型結晶**とは，以下の条件を満たすことである：

(i) $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + wt_i(b)$.

(ii) $wt_j(\tilde{e}_i b) = wt_j(b) + a_{ji}$ if $\tilde{e}_i b \in B$.

(iii) $wt_j(\tilde{f}_i b) = wt_j(b) - a_{ji}$ if $\tilde{f}_i b \in B$.

(iv) $\tilde{e}_i b_2 = b_1 \Longleftrightarrow \tilde{f}_i b_1 = b_2$.

(v) $\varepsilon_i(b) = -\infty \Longrightarrow \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0$.

(vi) $\tilde{e}_i(0) = \tilde{f}_i(0) = 0$.

(2) $(B, \{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, wt_i, \varepsilon_i, \varphi_i\}_{i=1}^n)$ が A 型結晶であるとき，B の元を頂点（vertex），$\tilde{f}_i$ を番号付き矢印 $\xrightarrow{i}$ として有向グラフが得られるが，このグラフを**結晶グラフ**という．

ここで，A 型結晶の例を見てみよう．

例 1 $n = 4$, $B := \left\{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}\right\}$ とおき，$\tilde{f}_i \boxed{i} = \boxed{i+1}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $\tilde{e}_i \boxed{i+1} = \boxed{i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $\tilde{f}_i \boxed{5} = 0$, $\tilde{e}_i \boxed{1} = 0$ $(\forall i)$, と定義すると，B 上に A 型結晶の構造が入り，

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \boxed{3} \xrightarrow{3} \boxed{4} \xrightarrow{4} \boxed{5} \qquad (1)$$

が結晶グラフとなる．

少しだけ一般的な結果について紹介する．$P_+ := (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ とし，P_+ の元を正ウェイトと呼ぶ．すると，各正ウェイト $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対して連結な結晶グラフを持つ A 型結晶 $B(\lambda)$ というものが存在する[8)]．上の例 1 は $\lambda = (1, 0, 0, 0)$ の場合であった．また，下で紹介する例 3 の結晶グラフは $B(0, 0, 1, 0)$ の場合である．2 つの例からわかるように，$B(\lambda)$ は最高ウェイトベクトルと呼ばれる頂点（例 1 では，$\boxed{1}$）に $\tilde{f}_i$ たちを作用させることによって全体が得られている．または，最低ウェイトベクトル（例 1 では $\boxed{5}$）に $\tilde{e}_i$ を作用させて全体が得られているともいえる．

ここで，$B(\lambda)$ に 1 つだけ存在する最高ウェイトベクトルを u_λ，最低ウェイトベクトルを v_λ と書くことにする．

定義 2[7] 対称群の元 $w=s_{i_1}\cdots s_{i_k}$ (最短表示) に対して, A 型 **Demazure 結晶** $B_w^{\pm}(\lambda)$ を帰納的に定義する：$B_{\mathrm{id}}^{+}(\lambda)=\{u_\lambda\}$, $B_{\mathrm{id}}^{-}(\lambda)=\{v_\lambda\}$. ここで $w>s_iw$ として

$$B_w^+(\lambda)=\bigcup_{m\geq 0}\tilde{f}_i^m B_{s_iw}^+(\lambda)\setminus\{0\},$$

$$B_w^-(\lambda)=\bigcup_{m\geq 0}\tilde{e}_i^m B_{s_iw}^-(\lambda)\setminus\{0\}$$

と定義する.

この定義は, 最短表示にはよらないことに注意.

4. 単項式表示

さて, 結晶の定義から集合上に結晶構造を定義できることがわかるが, この集合としてどのようなものをとるかによって結晶の実現のさせ方がかわってくる. 上の例のようにタブロー (tableaux) を用いる方法は一般的であるが, それ以外にも道 (path), 多角形 (polytope) を用いる方法など様々な実現が知られている. ここでは, その中から単項式を用いた実現について紹介する. 一般的な設定より, やや簡単な形で紹介する.

無限個の変数 $\{Y_{m,i}\,|\,m\in\mathbb{Z},\ 1\leq i\leq n\}$ に対してローラン単項式の集合

$$\mathcal{Y}:=\left\{\prod_{m\in\mathbb{Z},\,1\leq i\leq n}Y_{m,i}^{l_{m,i}}\ \middle|\ l_{m,i}\in\mathbb{Z}\right\}$$

上に次のようにして結晶の構造を定義する：

(1) 写像 $wt_i,\varepsilon_i,\varphi_i:\mathcal{Y}\to\mathbb{Z}$, $(i\in[1,n])$ は単項式 $Y=\prod Y_{m,i}^{l_{m,i}}\in\mathcal{Y}$ に対し

$$wt_i(Y):=\sum_m l_{m,i},$$

$$\varphi_i(Y):=\max\left\{\sum_{k\leq m}l_{k,i}\,\middle|\,m\in\mathbb{Z}\right\},$$

$$\varepsilon_i(Y):=\varphi_i(Y)-wt_i(Y)$$

と定義する.

(2) 単項式

$$A_{m,i}:=\begin{cases}Y_{m,1}Y_{m,2}^{-1}Y_{m+1,1}, & i=1,\\ Y_{m,i}Y_{m,i+1}^{-1}Y_{m+1,i-1}^{-1}Y_{m+1,i}, & 1<i<n,\\ Y_{m,n}Y_{m+1,n-1}^{-1}Y_{m+1,n}, & i=n,\end{cases}$$

とおいて,

$$\tilde{f}_iY=\begin{cases}A_{n_f,i}^{-1}Y, & \varphi_i(Y)>0,\\ 0, & \varphi_i(Y)=0,\end{cases}$$

$$\tilde{e}_iY=\begin{cases}A_{n_e,i}Y, & \varepsilon_i(Y)>0,\\ 0, & \varepsilon_i(Y)=0,\end{cases}$$

とする. ここで, $n_f:=\min\{m|\varphi_i(Y)=\sum_{k\leq m}l_{k,i}\}$, $n_e:=\max\{m|\varphi_i(Y)=\sum_{k\leq m}l_{k,i}\}$.

定理 1[5, 10] **(1)** 上で定義した $(\mathcal{Y},\{\tilde{e}_i,\tilde{f}_i,wt_i,\varepsilon_i,\varphi_i\}_{i=1}^n)$ は A 型結晶となる.
(2) $Y\in\mathcal{Y}$ について $\tilde{e}_iY=0$ が任意の $i\in[1,n]$ で成り立つなら Y を含む（結晶グラフの意味で）連結成分は $wt(Y):=(wt_1(Y),\cdots,wt_n(Y))$ を最高ウェイトとする A 型結晶 $B(wt(Y))$ に同型である.

この結果から, 1 つの単項式 Y がある連結な結晶 $\mathbb{B}$ に含まれていて $\mathbb{B}$ が最高ウェイト λ を持つとすると, $B(\lambda)\hookrightarrow\mathbb{B}\subset\mathcal{Y}$ という埋め込みが一意に決まる. それを, m_Y と書くことにする.

先の例 1 を単項式で表示してみよう.

例 2 変数 $Y_{m,i}=t_{i+4m}$, 単項式 $A_{m,i}=A_{i+4m}$ と置き換える. すると, 単項式 t_1 を含む連結成分は

$$\tilde{f}_1t_1=A_1^{-1}t_1=\frac{t_2}{t_1t_5}\cdot t_1=\frac{t_2}{t_5},$$

$$\tilde{f}_2\tilde{f}_1t_1=A_2^{-1}t_1=\frac{t_3t_5}{t_2t_6}\cdot\frac{t_2}{t_5}=\frac{t_3}{t_6},$$

$$\tilde{f}_3\tilde{f}_2\tilde{f}_1t_1=A_3^{-1}t_1=\frac{t_4t_6}{t_3t_7}\cdot\frac{t_3}{t_6}=\frac{t_4}{t_7},$$

$$\tilde{f}_4\tilde{f}_3\tilde{f}_2\tilde{f}_1t_1=A_4^{-1}t_1=\frac{t_7}{t_4t_8}\cdot\frac{t_4}{t_7}=\frac{1}{t_8}$$

$$\tilde{f}_i\frac{1}{t_8}=0\quad(\forall i=1,2,3,4)$$

となる. よって, その結晶グラフは

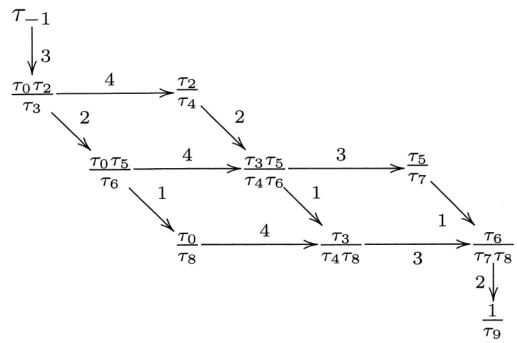
$$t_1\xrightarrow{1}\frac{t_2}{t_5}\xrightarrow{2}\frac{t_3}{t_6}\xrightarrow{3}\frac{t_4}{t_7}\xrightarrow{4}\frac{1}{t_8}$$

これは, 例 1 のグラフ, つまり $B(1,0,0,0)$ のグラフと同じものであることがわかる.

このように, 結晶基底は集合 B にどのようなものを考えるかによって実現の方法がいくつもある.

もう少し，複雑な例も見てみよう．

例 3 やはり，$n=4$ として，上の例 2 と同じ設定で τ_{-1} を含む結晶基底の連結成分の結晶グラフを求める．この場合，例えば，$\tilde{f}_3\tau_{-1} = A_{-1}^{-1}\tau_{-1} = \frac{\tau_0\tau_2}{\tau_{-1}\tau_3}\tau_{-1} = \frac{\tau_0\tau_2}{\tau_3}$, etc. となって，結局結晶グラフは



となる．あとの話とうまくあわせるために上のグラフでは，少しだけ設定を変えている．それは，t_8, t_9 は元々の設定では t_9, t_{10} であった．しかし，上の結晶グラフでは t_8 が現れないので番号を 1 つずらしたのである．これは，実は対称群の最短表示と整合性をとるための措置でもある．

さて，ここで前節で定義した Demazure 結晶も単項式表示すると次のようなものを考えることができる．

定義 3 単項式 Y は $\mathcal{Y}$ の中で $B(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$) と同型な結晶に含まれているとする．このとき，対称群の元 w に対して，

$$D_w^{\pm}[\lambda, Y] := \sum_{b \in B_w^{\pm}(\lambda)} m_Y(b)$$

と定義し，A 型 **Demazure 多項式**と呼ぶ．

5. Double Bruhat cell

2 節で紹介した $SL(n+1,\mathbb{C})$ のボレル部分群 $B^{\pm}$，冪単部分群 $U^{\pm}$ そして，対称群の元 u, v に対して

$$G^{u,v} := (BuB) \cap (B^- vB^-), \qquad (2)$$

$$L^{u,v} := (UuU) \cap (B^- vB^-) \qquad (3)$$

とおき，$G^{u,v}$ を **double Bruhat cell (DBC)**，$L^{u,v}$ を **reduced double Bruhat cell (rDBC)** と呼ぶ．それぞれの次元は $n + l(u) + l(v)$ と $l(u) + l(v)$ である．この記事では簡単のため以下 $v = \mathrm{id}$ の場合のみを扱うこととする．実際に，$v = \mathrm{id}$ の場合に $(\mathbb{C}^{\times})^{n+l(u)+l(v)} \to G^{u,v}$ $(\mathbb{C}^{\times})^{l(u)+l(v)} \to L^{u,v}$ なる双有理写像を構成してみよう．まず，次のような $SL(n+1,\mathbb{C})$ の元を考える：

$$x_i(t) := \begin{matrix} \\ i\,行 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ \cdots & 1 & t & \cdots \\ & 0 & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$x_{\bar{i}}(t) := \begin{matrix} \\ i\,行 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ & t & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\alpha_i^{\vee}(c) := \mathrm{diag}(1, \cdots, \overset{\overset{i}{\vee}}{c}, c^{-1}, \cdots, 1).$$

最後に，$x_{-i}(t) := x_{\bar{i}}(t)\alpha_i^{\vee}(t)^{-1}$ とおく．対称群の元 $u = s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ を最短表示とし，$\boldsymbol{i} = i_1 \cdots i_m$ とおく．このとき，$a \in T$ と $t = (t_j), \tau = (\tau_j) \in (\mathbb{C}^{\times})^m$ に対して

$$x_{\boldsymbol{i}}^G(a, \boldsymbol{t}) = x_{\boldsymbol{i}}^G(a; t_1, \cdots, t_m) = a x_{\bar{i_1}}(t_1) \cdots x_{\bar{i_m}}(t_m),$$

$$x_{\boldsymbol{i}}^L(\tau) = x_{\boldsymbol{i}}^L(\tau_1, \cdots, \tau_m) = x_{-i_1}(\tau_1) \cdots x_{-i_m}(\tau_m)$$

とすると，それぞれ $x_{\boldsymbol{i}}^G, x_{\boldsymbol{i}}^L$ が目的の双有理写像を与える．

例 4 $SL(5,\mathbb{C})$ と $S_5 = \langle s_i | 1 \leq i \leq 4 \rangle$ に対して $u := s_1 s_2 s_3 s_4 s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_1$, $v = \mathrm{id}$ という元を考えよう．この場合，$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^L : (\mathbb{C}^{\times})^{10} \xrightarrow{\sim} L^{u,\mathrm{id}}$ は

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^L(\tau_1, \cdots, \tau_{10}) \\ &= x_{-1}(\tau_1)x_{-2}(\tau_2)x_{-3}(\tau_3)x_{-4}(\tau_4)x_{-1}(\tau_5) \\ &\quad \times x_{-2}(\tau_6)x_{-3}(\tau_7)x_{-1}(\tau_8)x_{-2}(\tau_9)x_{-1}(\tau_{10}) \end{aligned}$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1\tau_5\tau_8\tau_{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & \frac{\tau_1\tau_5\tau_8\tau_{10}}{\tau_2\tau_6\tau_9} & 0 & 0 & 0 \\ B & C & \frac{\tau_2\tau_6\tau_9}{\tau_3\tau_7} & 0 & 0 \\ D & E & \frac{\tau_3\tau_9}{\tau_4}+\frac{\tau_6\tau_9}{\tau_7} & \frac{\tau_3\tau_7}{\tau_4} & 0 \\ 1 & \tau_{10} & \tau_9 & \tau_7 & \tau_4 \end{pmatrix}.
$$

ここで

$$A=\frac{\tau_1\tau_5\tau_8}{\tau_2\tau_6\tau_9}+\frac{\tau_1\tau_5}{\tau_2\tau_6\tau_{10}}+\frac{\tau_1}{\tau_2\tau_8\tau_{10}}+\frac{1}{\tau_5\tau_8\tau_{10}},$$

$$B=\frac{\tau_2\tau_6}{\tau_3\tau_7}+\frac{\tau_2\tau_8}{\tau_3\tau_9}+\frac{\tau_5\tau_8}{\tau_6\tau_9}+\frac{\tau_2}{\tau_3\tau_{10}}+\frac{\tau_5}{\tau_6\tau_{10}}+\frac{1}{\tau_8\tau_{10}},$$

$$C=\frac{\tau_2\tau_6\tau_{10}}{\tau_3\tau_7}+\frac{\tau_2\tau_8\tau_{10}}{\tau_3\tau_9}+\frac{\tau_5\tau_8\tau_{10}}{\tau_6\tau_9},$$

$$D=\frac{\tau_3}{\tau_4}+\frac{\tau_6}{\tau_7}+\frac{\tau_8}{\tau_9}+\frac{1}{\tau_{10}},$$

$$E=\frac{\tau_3\tau_{10}}{\tau_4}+\frac{\tau_6\tau_{10}}{\tau_7}+\frac{\tau_8\tau_{10}}{\tau_9}$$

となることがわかる．

6. DBC 上の団代数構造

ここまで団代数の話が一切出ないので多少不安に感じられた方もいらっしゃるかもしれないが，ここでようやく少しだけ団代数に関係する話が登場する．

Berenstein, Fomin, Zelevinsky[1)]によって導入された2つの対称群の元の組 (u,v) によってきまる団代数について見てみよう．

注：今，団代数と書いたが原論文[1)]においては，団代数より少し広いクラスの上団代数（upper cluster algebra）となっている．しかし，Yakimov により団代数となることが証明されたので，ここでは団代数とする（Yakimov 本人から直接聞いたので間違いないと信じる）．

u,v の最短表示をそれぞれ $u=s_{i_1}\cdots s_{i_j}$, $v=s_{i_{j+1}}\cdots s_{i_L}$ とおく．ここで，(u,v) の最短表示として $\boldsymbol{i}=(-i_1,\cdots,-i_j,i_{j+1},\cdots,i_L)$ とおく．ここで，マイナスは左側の u の番号であることを意味するものとする．この $\boldsymbol{i}$ に対して一定のレシピにより団代数 $\overline{A}(\boldsymbol{i})$ が定義される．

次に DBC $G^{u,v}$ の上の関数としてある小行列式を定義する．上の (u,v) に対して最短表示なども同じものとして $k\in\{1,2,\cdots,L\}$ に対して，次のような対称群の元を

$$u_k=u_k(\boldsymbol{i})=\prod_{l=1,\cdots,\min(j,k)} s_{i_l},$$

$$v_k=v_k(\boldsymbol{i})=\prod_{l=l(u)+l(v),\cdots,\max(k+1,j+1)} s_{i_l}$$

と定義する．

$I,J\subset\{1,2,\cdots,n\}$ $(|I|=|J|)$ と $x\in SL(n+1,\mathbb{C})$ に対して $\Delta_{I,J}(x)$ を行列 x の I 行 J 列小行列式とする．$i_1,\cdots i_p, j_1,\cdots,j_q$ を $u,v\in S_{n+1}$ の最短表示とし，$[k;u]:=\{j|1\le j\le i_k\}$, $[k;v]:=\{j|1\le j\le j_k\}$ に対して

$$\Delta(k;\boldsymbol{i})(x):=\Delta_{u_k[k;u],v_k[k;v]}(x)$$

とおく．このとき，次の定理が成り立つ：

定理 2[1)]　写像

$$\bar{A}(\boldsymbol{i})_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[G^{u,v}] \quad (x_k \longmapsto \Delta(k;\boldsymbol{i}))$$

は $\mathbb{C}$ 代数の同型を与える．

この定理により，団代数と DBC（または，rDBC）上の関数，特に小行列式が結びつくことがわかる．

7. rDBC 上の小行列式と結晶基底の単項式表示

前節でようやく団代数が登場したので，結論めいたものを述べる準備は整った．前節の DBC 上の小行列式と5節で紹介した $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^L$ を合成してできる $(\mathbb{C}^\times)^N$ 上の関数について見ていこう．

$$\Delta^L(k,\boldsymbol{i})(\tau):=\Delta(k;\boldsymbol{i})(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^L(\tau))$$

とおく．これにより，通常の $(x_{ij})\in SL(n+1,\mathbb{C})$ という行列の座標から (τ_j) による座標に変換された．そのメリットはなんといっても

(1)　小行列式を正係数の単項式の和で表せる，

(2)　結晶基底の単項表示と結びつくということ

である．このメリットは，必ずしも証明されたものだけではないけれどいくつかの似た状況から推測されるものである．

例を見てみよう．

例 5　上の例4の設定を引きついでいく．$k=6$ のとき，$u_k=s_1s_2s_3s_4s_1s_2$ となり，$[u;k]=\{1,2\}$,

$u_k\{1,2\} = \{3,4\}$ であるので，

$$\Delta(6;\boldsymbol{i})(x) = \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{vmatrix} = x_{31}x_{42} - x_{32}x_{41} \tag{4}$$

を得る．よって，

$$\Delta^L(6;\boldsymbol{i})(\tau) := (\Delta(6;\boldsymbol{i}) \circ x^L_{\boldsymbol{i}})(\tau_1, \cdots, \tau_{10})$$

$$= \begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\tau_2}{\tau_4} + \frac{\tau_3\tau_5}{\tau_4\tau_6} + \frac{\tau_5}{\tau_7} + \frac{\tau_3}{\tau_4\tau_8} + \frac{\tau_6}{\tau_7\tau_8} + \frac{1}{\tau_9}. \quad (\star)$$

この最後に得られた $(\star)$ の各単項式は実は例 4 の結晶グラフの各頂点で τ_{-1}, τ_0 を含まないものと一致していることがわかる．これは，3 節で紹介した Demazure 結晶 $B^-_{u_6}(0,0,1,0)$ に他ならず 4 節で定義した Demazure 多項式を用いて

$$\Delta^L(6;\boldsymbol{i})(\tau) = D^-_{u_6}\left[(0,0,1,0), \frac{1}{\tau_9}\right]$$

とわかる．ようやく団代数の団変数と結晶基底の単項式表示が結びついた．

番号 $\{1,2,\cdots,n\}$ の列を

$$\boldsymbol{i} = (\underbrace{-1,\cdots,-n}_{\text{1st cycle}}, \underbrace{-1,\cdots,-(n-1)}_{\text{2nd cycle}}, \cdots,$$
$$\underbrace{-1,\cdots,-(n-m+2)}_{(m-1)\text{th cycle}}, \underbrace{-1,\cdots,i_n}_{m\text{th cycle}})$$

とおく．これは，2 節で紹介した最長元で右からいくつかの s_j を取り除いた形をしている．

定理 3[9]　対称群の元 u は $\boldsymbol{i}$ に沿った最短表示をもつとし，$v = \mathrm{id}$ としておく．$\boldsymbol{i}$ の左から k 番目の i_k は m' 番目（$m' \le m$）の cycle にいるとする．$l_0 = 0, l_j := n + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-j+1)$ $(1 \le j \le m)$, $|i_k| = d$ とおいて，次を得る：

$$\Delta^L(k;\boldsymbol{i})(\tau) = D^-_{u_k}[(m-m')\Lambda_{n+1-d},$$
$$(\tau_{l_{m-1}+d}\tau_{l_{m-2}+d}\cdots\tau_{l_{m'+1}+d}\tau_{l_{m'}+d})^{-1}].$$

この結果により，DBC 上の団代数の団変数が Demazure 多項式によって記述されることがわかった．

8. 最後に

本文中にもいくつかあげたが，さらに勉強したいという方のために，参考文献を紹介する．団代数の教科書的なものはほとんどなかったが，2) はよい参考書と思われる．また，量子群と結晶基底については 3, 4) が比較的読みやすい文献である．

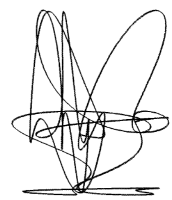
原稿の間違い，誤植を指摘してくれた大学院生の金久保有輝君に感謝する．記事全体として細かな計算中心の話になってしまったことは，読者には申し訳ないが，多くの計算に支えられた精緻な理論こそが今は亡き Andrei Zelevinsky の数学の神髄であったと思う．彼の冥福を祈りつつ筆をおく．

参考文献

1) Berenstein A., Fomin S. and Zelevinsky A., Cluster algebras 3 : Upper bounds and double Bruhat cells. *Duke Mathematical Journal* Vol.**126**, No.1, 1–52 (2005).
2) Gekhtman M., Shapiro M. and Vainshtein A., Cluster Algebras and Poisson Geometry, *Mathematical Surveys and Monographs*, Vol.**167**, AMS (2010).
3) Hong J. and Kang S-J., Quantum Groups and Crystal Bases, *Graduate Studies in Mathematics* Vol.**42**, AMS (2002).
4) Jantzen C., Lectures on Quantum Groups, *Graduate Studies in Mathematics* Vol.**6**., AMS (1995).
5) Kashiwara M., Realizations of crystals, *Combinatorial and geometric representation theory* (Seoul, 2001).
6) Kashiwara M., On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras, *Duke Mathematical Journal* Vol.**63**, No.2, 465–516 (1991).
7) Kashiwara M., Crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula, *Duke Mathematical Journal* Vol.**71**, No.3, 839–858 (1993).
8) Kashiwara M. and Nakashima T., Crystal graph for representations of the q-analogue of classical Lie algebras, *J. Algebra*, Vol.**165**, Number 2 (1994), 295–345.
9) Kanakubo Y. and Nakashima T., Cluster Variables on Double Bruhat Cells of type (u,e) and Monomial Realizations of Crystal Bases, arXiv:1409.8622 (preprint).
10) Nakajima H, t-analogs of q-characters quantum affine algebras of type A_n, D_n, *Contemp. Math*, **325**, AMS, Providence, RI, 141–160 (2003).

（なかしま・としき，上智大学理工学部）

団代数と標準基底



木村 嘉之

1. 団代数と団単項式

団代数およびその（x 変数の）量子化である量子団代数は，Fomin–Zelevinsky[6] および Berenstein–Zelevinsky[3] によって，**全正値性（totalpositivity）の理論**と**標準基底**の“組合せ的な性質”を抽出した形で導入されました．全正値性の理論とは全正値行列（すべての小行列式が正であるような行列）の理論の一般化であり，Lusztig により簡約群（およびその極大冪単部分群）や旗多様体へ拡張されました．

最も簡単な団代数の例としては，a, b, c, d を生成元として，

$$ad - bc = 1$$

を基本関係式とする可換環，すなわち行列式が 1 の 2 次正方行列全体のなす線形代数群 SL_2 の座標環を考えます．上の関係式を以下の関係式と考えてみましょう．

$$ad = 1 + bc.$$

このように見直すと，b, c を“係数”とした，“団変数”a, d たちに関する二項交換関係式とみなせ，階数 1 の団代数となります．

Fomin–Zelevinsky[6] は，導入部において具体例として，以下の例における二項交換関係式を挙げています．

- 小さい階数の線形代数群 G および等質空間 base affine space G/N の座標環．
- グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_{2,n+3}$ $(n \geq 1)$ の（標準的な Plücker 埋め込みに関する）斉次座標環．

また，一般に，簡約代数群 G に関連した様々な代数多様体（例えば複素半単純代数群の二重 Bruhat 胞体や，Schubert 胞体等）の座標環に団代数の構造が定まり，またそれらの代数多様体の座標環およびその量子変形（量子座標環）における“双対標準基底”の理解に役立ち，また“双対標準基底”は“団単項式”を含むということが予想[6, p.498] されました．Berenstein–Fomin–Zelevinsky[1, Theorem 2.10] は，二重 Bruhat 胞体の座標環において，初期種子を構成し，（一般化）小行列式の間の恒等式を用いて座標環が団代数を含むことを示しました*1)．特別な場合として，base affine space G/N の（最大胞体の）座標環が団代数を含むことも示しています．

さて，団単項式とは，以下のように団代数の組合せ的な構造を用いて定義されます．

定義 1．団単項式（cluster monomial）とは，各団に含まれる団変数たちのみからなる単項式のことを言う．

雰囲気をつかむために，階数 2 の場合の（係数なし）団代数について少し考察します．Q を 1 から

*1) 正確には，団代数の上界（upper bound, upper cluster algebra）と呼ばれる団代数を含む可換環への同型を与えました．Goodearl–Yakimov により，Berenstein–Fomin–Zelevinsky[1] の構成した団代数はその上界である二重 Bruhat 胞体の座標環と一致することがアナウンスされています．

2へ a 本の矢をもつ（一般化）Kronecker 箙とし，初期種子を $((x_1,x_2),Q)$ とします．このとき，団代数 $\mathcal{A}(((x_1,x_2),Q))$ は，有理関数体 $\mathbb{Q}(x_1,x_2)$ の中で，漸化式

$$x_{k+1}x_{k-1}=1+x_k^a \quad (k\in\mathbb{Z})$$

で定義される団変数たち $\{x_k \mid k\in\mathbb{Z}\}$ で生成される可換環で，団は，$\{\{x_{k+1},x_{k+2}\}\mid k\in\mathbb{Z}\}$ という部分集合たちで，団単項式は，

$$x_{k+1}^{g_{k;1}}x_{k+2}^{g_{k;2}} \quad (k\in\mathbb{Z},\ g_{k;1},g_{k;2}\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

という元たちです．

例1（A_2 型団代数）．$a=1$ の場合には，中西氏の記事で計算されているように，周期性と有限性を持ち，以下のような Laurent 多項式になります．

$$x_k=\begin{cases} x_1, & k\equiv 1 \pmod 5,\\ x_2, & k\equiv 2 \pmod 5,\\ \dfrac{1+x_2}{x_1}, & k\equiv 3 \pmod 5,\\ \dfrac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}, & k\equiv 4 \pmod 5,\\ \dfrac{1+x_1}{x_2}, & k\equiv 0 \pmod 5.\end{cases}$$

また，この場合には，

$$\mathcal{M}=\bigcup_{0\leq k\leq 4}\left\{x_{k+1}^{g_{k;1}}x_{k+2}^{g_{k;2}}\middle| g_{k;1},g_{k;2}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$$

が $\mathcal{A}$ の基底になることが分かります．

しかしながら，$a\geq 2$ においては，周期性も有限性も持ちません．

例2（$A_1^{(1)}$ 型団代数）．$a\geq 2$ の場合には，周期性も有限性も持ちません．$a=2$ の場合に実際に計算してみると，

$$\begin{aligned} x_3&=\left(1+x_2^2\right)/x_1,\\ x_4&=\left(1+x_1^2+2x_2^2+x_2^4\right)/x_1^2x_2,\\ x_5&=\left(1+2x_1^2+x_1^4+\cdots+3x_2^4+x_2^6\right)/x_1^3x_2^2,\\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

とどんどん分母の単項式のべき指数が大きくなっていくことを見て取ることができます．この場合にも，

$$\mathcal{M}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{x_{k+1}^{g_{k;1}}x_{k+2}^{g_{k;2}}\middle| g_{k;1},g_{k;2}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$$

が一次独立であることが分かります．しかしながら，上の場合と違い $\mathcal{M}$ は $\mathcal{A}$ を線形空間として生成しません．例えば，

$$z=z_k=\frac{1+x_k^2+x_{k+1}^2}{x_kx_{k+1}}$$

という Laurent 多項式を考えると k に依存せず，$z=x_{k+3}x_k-x_{k+2}x_{k+1}\in\mathcal{A}$ だが，$\mathcal{M}$ の線形結合では書けないということがわかります．一般に，z に関する多項式*2) と $\mathcal{M}$ の元の積により，$\mathcal{A}$ の基底は得られることが知られています．

団単項式に関する一般な定理として以下のことが知られています．

定理1（Cerulli Irelli, Keller, Labardini–Fragoso, Plamondon[4)]）．反対称型団代数において，団単項式は一次独立である．

上の定理は，ポテンシャルつき箙の表現論を用いた反対称型団代数の加法的圏論化を用いて，証明されました．

2. 団代数と“標準”基底

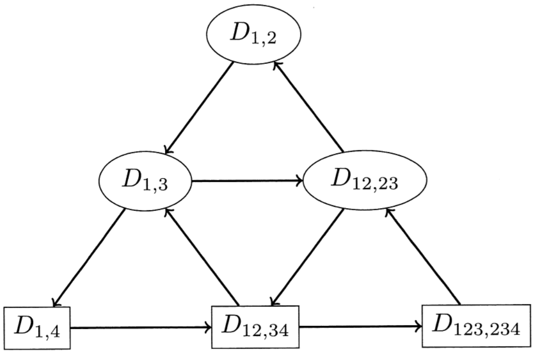
では，そもそもどうして一次独立であることを予想したのかを少し紐解いてみましょう．まず，Lusztig の全正値性の理論は，標準基底の正値性に基づいて構成されています．ゆえに団単項式に関する正値性を得る上で，Fomin–Zelevinsky[6)] は，団単項式を含む“双対標準基底”の存在を主張し，また団単項式の一次独立性も予想したわけです．

では団代数の登場以前に少し立ち戻ってみましょう．後付けの説明になりますが，base affine space G/N の座標環の団代数の構造から，極大冪単部分群 N の座標環 $\mathbb{C}[N]$ に関しても，係数に関する変換を行うことで，以下のような初期種子が得

*2) 具体的には，z に関する単項式 z^n（双対半標準基底もしくは“generic basis”）や z に関する第1種 Chebyshev 多項式（“atomic basis”や“greedy basis”）もしくは第2種 Chebyshev 多項式（双対標準基底）を考えます．

られます．

例 3（A_3 型団代数 $\mathbb{C}[N]$）． $G = \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ とし，N を対角成分が 1 の上三角行列全体のなす部分群（極大冪単部分群）とする．$\mathbb{C}[N]$ の初期種子は，以下で与えられる．



ここで，部分集合の組 $I, J \subset [1,4]$ に対して，$D_{I,J}$ を I 行 J 列のなす小行列の行列式を表す．また，$D_{1,4}, D_{12,34}, D_{123,234}$ は変異を行わない変数（係数）と考えます．団代数としての型は，頂点 $1,2,3$ における部分箙（主要部）だけで決まり，（1 で変異することにより）A_3 型であること[*3)]が分かります．

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_1$ という順に変異を行うことにより，$D_{2,3}, D_{2,4}, D_{3,4}$ を団変数として得ることができることがわかり，$\mathbb{C}[N]$ は 14 個の団と，（3 個の係数を含めると）12 個の変数をもつ（係数つき）A_3 型団代数となることが示されます．また，この場合には，団単項式全体のなす集合が Berenstein–Zelevinsky による Lusztig–柏原の双対標準基底の記述[2]により（その特殊化）と一致することが分かります．

Berenstein–Zelevinsky の A_2, A_3 型の場合の双対標準基底の記述[2, §5, §9]においては，q 可換な元たちの単項式という形で，双対標準基底が得られていました．しかしながら，双対標準基底がすべてそのような q 可換な元たちの単項式たちだけからなっていると，自乗したところで q 可換な元たちの単項式にすぎないので，すべて双対標準基底は自乗しても（q べきを除いて）双対標準基底の元となるという強い性質を持ちます．より強く Berenstein–Zelevinsky は，q 可換な双対標準基底の元は，その積も（q べきを除いて）双対標準基底の元であるという予想もしました．Leclerc[15] は双対標準基底の元であって，自乗すると双対標準基底の 2 つの和になる元を発見し，Berenstein–Zelevinsky 予想の反例を与えました．それは折しも，（後付けの理由としては有限型団代数ではない）SL_6 において発見しました．

団代数における“標準基底”の構成というのが，団代数を理解する上で，根元的な問題と考えられています．どのような基底が，考えている代数に関して“標準基底”と呼ばれるべきであるかは，基底自体に意味を見出す，表現論特有の問題だと思われます．Berenstein–Zelevinsky の記述に立ち戻って，“団変数が同じ団に含まれるということ”を“積が基底 $\mathcal{B}$ に含まれる”という性質によって特徴付けられる基底をひとまず“標準基底”ということにするのが，一つの指針です．これを具体的に書き下すと，以下の Fomin–Pylyavskyy[5, Conjecture 9.5] による予想にたどり着きます．

予想 1. 幾何型団代数 $\mathcal{A}$ には，以下の条件を満たす基底 $\mathcal{B}$ が存在する．

(1) $\mathcal{B}$ は団変数の集合 $\mathcal{X}$ を含む．

(2) 団変数 x, y に対して，$xy \in \mathcal{B}$ と x, y を含む団が存在することは必要十分条件である．

(3) 任意の $b \in \mathcal{B}$ と係数 z に対して，$zb \in \mathcal{B}$ が成り立つ．

(4) $b_1, \cdots, b_l \in \mathcal{B}$ に対して，任意の 2 つの元の積 $b_i b_j \in \mathcal{B}$ と $b_1 \cdots b_n \in \mathcal{B}$ は必要十分条件である．

上の 4 条件から，団単項式が $\mathcal{B}$ に含まれることはわかります．また，全正値性の観点からは，以下の**強正値性予想（strong positivity conjecture）**が考えられています．

予想 2（強正値性予想）**.** 幾何型団代数 $\mathcal{A}$ には，以下の条件を満たす基底 $\mathcal{B}$ が存在する．

*3) $\mathbb{C}[N]$ の団代数としての有限型分類および団代数としての型は Berenstein–Fomin–Zelevinsky[1, Proposition 2.26] により $G = \mathrm{SL}_3, \mathrm{SL}_4, \mathrm{SL}_5, \mathrm{Sp}_4$ に限ることが知られています．

(1) $\mathcal{B}$ は団単項式のなす集合 $\mathcal{M}$ を含む.
(2) $\mathcal{B}$ の構造定数はすべて非負である.

最近, Gross–Hacking–Keel–Kontsevich[8]では, 2種類の団多様体の"ミラー対称性"の思想の下, "正則円盤のトロピカル化"の数え上げを用いて, (修正された形での) Fock–Goncharov 双対性予想と共に, ("弱い"仮定の下で) 強正値性予想を証明しました.

3. 団代数のモノイダル圏論化

強正値性予想への表現論の観点からのアプローチとしては, Hernandez–Leclerc[9]によって提唱された団代数の"モノイダル圏論化"の構成によって直ちに証明されます.

定義2 (Hernandez–Leclerc[9]). 幾何型団代数 $\mathcal{A}$ に対して, モノイダルアーベル圏 $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathcal{A})$ が幾何型団代数 $\mathcal{A}$ の**モノイダル圏論化** (**monoidal categorification**) であるとは, 以下の条件を満たすことを言う.
(1) (可換) 環としての同型 $\mathcal{A} \simeq K_0(\mathscr{C})$ が存在する, ここで $K_0(\mathscr{C})$ は $\mathscr{C}$ の Grothendieck 環である.
(2) 上の同型の下で, 団単項式のなす集合が, 単純対象の同型類のなす基底に含まれる.

実際のところは, むしろ立場が逆で, 量子アファイン代数や箙ヘッケ代数など, 対称ではないテンソル積構造を持つものの, 可換な Grothendieck 環をもつモノイダルアーベル圏が知られており, また, それらの代数に関しては, Lascoux–Leclerc–Thibon–有木型理論から, Grothendieck 環において単純対象のなす基底が ("量子群"を用いて定義される) "双対標準基底" (の特殊化) と一致することが知られていますので, 団代数と標準基底に関する根本的な問題を, 表現論の観点から述べ直したものが, モノイダル圏論化に他ならないわけです.

では, モノイダル圏論化において, 団変数, 団単項式はどのような対象として理解されるのでしょうか?

定義3. **(1)** 単純対象 $S \in \mathscr{C}$ が**素単純対象** (**prime simple object**) であるとは, 非自明なテンソル積分解 $S \simeq S_1 \otimes S_2$ を持たないことを言う.
(2) 単純対象 $S \in \mathscr{C}$ が**実単純対象** (**real simple object**) であるとは, 自乗 $S \otimes S$ が単純対象であることを言う.
(3) 実単純対象のなす集合 $\boldsymbol{S} = \{S_1, \cdots, S_r\}$ が**モノイダル団** (**monoidal cluster**) であるとは, 任意の $1 \leq i, j \leq r$ に対して, $S_i \otimes S_j \simeq S_j \otimes S_i$ が成り立つことを言う.

モノイダル圏論化における意味付けとして, 団変数は, 実かつ素な単純対象, そして団単項式は実単純対象と対応すると予想されています. また, 実単純対象に関しては, Kang–柏原–Kim–Oh により, 量子アファイン代数や対称箙ヘッケ代数の場合には, "Berenstein–Zelevinsky 予想"のモノイダル圏における類似として以下の極めて強力な定理*4)が証明されました.

定理2 (Kang–柏原–Kim–Oh[12]). S_1, S_2 の少なくとも一つを実単純加群とする. このとき, 以下が成り立つ.
(1) テンソル $S_1 \otimes S_2$ の最大半単純商加群および最大半単純部分加群は単純対象である.
(2) $S_1 \otimes S_2 \simeq S_2 \otimes S_1$ ならば, テンソル積 $S_1 \otimes S_2$ は単純対象である.

上の定理を用いると, 任意の $1 \leq i, j \leq r$ に対して $S_i \otimes S_j \simeq S_j \otimes S_i$ が成り立つという条件と S_i が実単純対象であるという条件から, 任意の非負整数の組 $\boldsymbol{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ に対して, $S(\boldsymbol{a}) = S_1^{\otimes a_1} \otimes S_2^{\otimes a_2} \otimes \cdots \otimes S_r^{\otimes a_r}$ が単純対象であることが示されます.

モノイダル団 $\boldsymbol{S} = \{S_i\}_{i \in i}$ と交換行列 $B =$

*4) ADE 型の場合に, 極大冪単部分群の座標環のモノイダル圏論化の (この定理を用いた) 証明がアナウンスされています.

(b_{ij}) の組に対して，二項関係式

$$[S_k]\left[S_k^{'}\right]=\prod_{i\in I}[S_i]^{[b_{ik}]_+}+\prod_{i\in I}[S_i]^{[-b_{ik}]_+}$$

は，以下の非同型な 2 つの短完全列

$$0\to\bigotimes_{i\in I}S_i^{\otimes[b_{ik}]_+}\to S_k\otimes S_k^{'}\to\bigotimes_{i\in I}S_i^{\otimes[-b_{ik}]}\to 0$$

$$0\to\bigotimes_{i\in I}S_i^{\otimes[-b_{ik}]}\to S_k^{\prime}\otimes S_k\to\bigotimes_{i\in I}S_i^{\otimes[b_{ik}]_+}\to 0$$

に対応し，$\mu_k(\boldsymbol{S})=\boldsymbol{S}\setminus\{S_k\}\cup\{S_k^{\prime}\}$ が再びモノイダル団になるということが，k 方向にモノイダル種子としての変異に他なりません．Kang–柏原–Kim–Oh[11] は，量子団代数の次数付きモノイダル圏による圏論化を導入し，任意の方向に変異可能な種子が一つ存在すれば，次数付き Grothendieck 環と量子団代数の同型の下，繰り返し変異可能であることを示しました．

4. 団代数と冪単部分群

ここでは，Geiss–Leclerc–Schröer による前射影多元環を用いた（量子）団代数の加法的圏論化に関する仕事について紹介します．詳細について著者らによるサーベイ[7] を参考にして下さい．また団代数の加法的圏論化に関しては，伊山氏の記事を参考にして下さい．

前射影多元環と極大冪単部分群

Q を Dynkin 図形 Γ に向きを入れた非輪状箙，すなわち Q は向き付けられたサイクルを持たないと仮定します．$\overline{Q}$ で Q に逆向きの向き付けられた辺を付け加えた箙とし，$\overline{Q}$ を Q の二重化と言います．$\overline{Q}$ の経路多元環 $\mathbb{C}\overline{Q}$ における以下の元

$$\mu=\sum_{a\in Q_1}(aa^*-a^*a)\in\mathbb{C}\overline{Q}$$

を基本関係式とする代数 $\Lambda=\Lambda_Q=\mathbb{C}\overline{Q}/\langle\mu\rangle$ は**前射影多元環（preprojective algebra）**と呼ばれ，Gelfand–Ponomarev により導入されました．また，Λ_Q は Q の向きには依存しないことが知られています．

前射影多元環に関しては，Lusztig および柏原–斉藤により量子展開環の結晶基底と密接な関係があることが知られていました．特に，極大冪零部分環の普遍展開環は，前射影多元環の（冪零）表現多様体（=Lusztig 箙多様体）の構成可能関数を用いて構成され，Lusztig 箙多様体の既約成分によって添字付けられる半標準基底（semicanonical basis）と呼ばれる基底の存在が知られていました．よって，双対である極大冪単部分群の座標環には，双対半標準基底（dual semicanonical basis）が得られ，構成可能関数に対して，各既約成分での“一般値”を与える汎関数として得られます．

団代数と前射影多元環

Λ_Q は Q が Dynkin 型の場合には自己移入的かつ，Q が A_n $(1\leq n\leq 4)$ 型のみ有限表現型であり，D_4 型および A_5 型の場合には従順表現型，その他の場合は野生表現型であることから，加群圏の構造は非常に複雑であることが認識されていました．

Geiss–Leclerc–Schröer は，双対半標準基底に着目し，前射影多元環の表現すなわち Lusztig 箙多様体の各点での構成可能関数の評価関数を考えることで，mod (Λ_Q) の団傾加群の変異およびその自己準同型環の Gabriel 箙の変異の対応（mod (Λ_Q) の“団構造”とも言われる）を用いて，$\mathbb{C}[N]$ に団代数の構造が定まることを証明しました．またその中で，団単項式のなす集合が，開軌道を含むような既約成分に対応する双対半標準基底の部分集合に含まれることを示しました．そして，開軌道を含むような既約成分に対応する双対半標準基底の部分集合は，双対標準基底（の特殊化）に含まれているという開軌道予想を提出しました．

量子団代数に関しても，団構造をもつ Frobenius 圏から量子種を定義し，極大冪単部分群の量子座標環と同型であることを示しました．開軌道予想は，量子化の下 mod (Λ_Q) の団構造の定める量子団単項式のなす集合が双対標準基底に含まれるという予想に置き換えられました．一般に，Kac–Moody 群に付随する Weyl 群の元 w に付随する冪単部分群 $N(w)$ に対しても，前射影多元環の有限次元商多元環上の射影次元が 1 以下の加群のなす Frobenius 圏（もしくはその双対）の団構造を用

いて，冪単部分群 $N(w)$ の座標環の団代数構造および，冪単部分群 $N(w)$ の座標環の量子化（量子冪単部分群[13]）の量子団代数構造が得られています．

5. 団代数と箙多様体

中島は，**箙多様体**を用いた量子アファイン代数の表現論を展開し，特に（アファイン）箙多様体上の偏屈層を用いて，Grothendieck 環の量子化（量子 Grothendieck 環）とその双対標準基底（の類似）を導入しました．また，量子アファイン代数の有限次元表現の重要なクラスである Kirillov–Reshetikhin 加群と呼ばれる単純加群の間の短完全列として，T 系と呼ばれる離散可積分系[*5)]が得られることを示しました．

Hernandez–Leclerc[9, 10]は，T 系を用いて量子アファイン代数の有限次元表現の圏 $\mathscr{C}$ の Grothendieck 環に団代数構造を定めました．また，有限次元表現の圏にモノイダルアーベル部分圏 $\mathscr{C}_l$ $(l \geq 1)$ を導入し，A_n,D_n 型の場合には，$\mathscr{C}_1$ の場合に，団単項式が単純加群のなす基底に一致することを示しました．

中島[16]および，筆者と Qin 氏の共同研究[14]では，$\mathscr{C}_1$ に相当する（次数付きアファイン）箙多様体上の偏屈層を用いて，双対標準基底に団単項式が含まれることを示しました．また応用として，非輪状箙 Q に付随する Coxeter 元 c_Q の自乗 c_Q^2 の定める冪単部分群 $N\left(c_Q^2\right)$ の量子座標環において，量子団単項式が双対標準基底に含まれることが示されました．

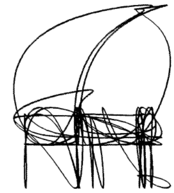
参考文献

1) Arkady Berenstein, Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras III: Upper bounds and double Bruhat cells. *Duke Math. J.*, **126**(1): 1–52, 2005.
2) Arkady Berenstein and Andrei Zelevinsky. String bases for quantum groups of type A_r. In *I. M. Gelfand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 51–89. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
3) Arkady Berenstein and Andrei Zelevinsky. Quantum cluster algebras. *Adv. Math.*, **195**(2):405–455, 2005.
4) Giovanni Cerulli Irelli, Bernhard Keller, Daniel Labardini-Fragoso, and Pierre-Guy Plamondon. Linear independence of cluster monomials for skew-symmetric cluster algebras. *Compos. Math.*, **149**(10):1753–1764, 2013.
5) Sergey Fomin and Pavlo Pylyavskyy. Tensor diagrams and cluster algebras. arxiv preprint (http://arxiv.org/abs/1210.1888), 10 2012.
6) Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, **15** (2):497–529 (electronic), 2002.
7) Christof Geiss, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Cluster algebras in algebraic Lie theory. *Transform. Groups*, **18**(1):149–178, 2013.
8) Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. arxiv preprint (http://arxiv.org/abs/1411.1394), 11 2014.
9) David Hernandez and Bernard Leclerc. Cluster algebras and quantum affine algebras. *Duke Math. J.*, **154**(2):265–341, 2010.
10) David Hernandez and Bernard Leclerc. Monoidal categorifications of cluster algebras of type A and D. In *Symmetries, integrable systems and representations*, volume 40 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 175–193. Springer, Heidelberg, 2013.
11) Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara, Myungho Kim, and Se-jin Oh. Monoidal categorification of cluster algebras. arxiv preprint (http://arxiv.org/abs/1412.8106), 2014.
12) Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara, Myungho Kim, and Se-jin Oh. Simplicity of heads and socles of tensor products. arxiv preprint (http://arxiv.org/abs/1404.4125), 04 2014.
13) Yoshiyuki Kimura. Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis. *Kyoto J. Math.*, **52**(2): 277–331, 2012.
14) Yoshiyuki Kimura and Fan Qin. Graded quiver varieties, quantum cluster algebras and dual canonical basis. *Adv. Math.*, **262**:261–312, 2014.
15) Bernard. Leclerc. Imaginary vectors in the dual canonical basis of $U_q(\mathfrak{n})$. *Transform. Groups*, **8** (1):95–104, 2003.
16) Hiraku Nakajima. Quiver varieties and cluster algebras. *Kyoto J. Math.*, **51**(1):71–126, 2011.

（きむら・よしゆき，京都大学数理解析研究所/大阪市立大学数学研究所）

*5) また T 系の定める団代数は，特別な場合の冪単部分群の座標環の団代数構造と同定されます．

団代数とYシステム



井上 玲

「Y システム」は量子可積分系や共形場理論に出自をもつ差分方程式で，90 年代初めに発見されました．Y システムが周期性を持つという予想，そして Y システムの解と Rogers のダイログ関数 (dilogarithm function) の恒等式に関する予想が Zamolodchikov をはじめとする幾つかの研究グループによって提唱され，様々な方法で部分的に解決されてきました．

今世紀に入り，両予想を解決する決定打となったのが団代数による定式化です．本稿では，Fomin と Zelevinsky[1], Keller[4] の方法と結果に触れながら，中西らによる解決への道筋を紹介したいと思います．Y システムと同じアルファベットの「y 変数」が本稿の主役です．

■ 1. Y システムの例 ■

団代数では，n 次反対称整数行列 $B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ と n 個の可換な変数の組 $y=(y_i)_{1\leq i\leq n}$ のペア (B,y) を **Y 種子**と呼びます．$k=1,\ldots,n$ に対し，Y 種子の変異 $(B',y')=\mu_k(B,y)$ は

$$b'_{ij}=\begin{cases}-b_{ij}, & i=k \text{ または } j=k,\\ b_{ij}+\dfrac{|b_{ik}|b_{kj}+b_{ik}|b_{kj}|}{2}, & i,j\neq k,\end{cases}$$

$$y'_i=\begin{cases}y_k^{-1}, & i=k,\\ y_i(1+y_k)^{b_{ik}}, & i\neq k,\ b_{ik}\geq 0,\\ y_i(1+y_k^{-1})^{b_{ik}}, & i\neq k,\ b_{ik}\leq 0\end{cases}$$

で定義されます．最も簡単な例，A_2 型団代数における y 変数の変異を調べてみましょう．

初期交換行列を

$$B(0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

初期 y 変数を $y(0)=(y_1^0,y_2^0)$ とおきます．初期 Y 種子 $(B(0),y(0))$ に μ_1 と μ_2 を交互に作用させた変異の列

$$\cdots\overset{\mu_1}{\longleftrightarrow}(B(-1),y(-1))\overset{\mu_2}{\longleftrightarrow}(B(0),y(0))$$
$$\overset{\mu_1}{\longleftrightarrow}(B(1),y(1))\overset{\mu_2}{\longleftrightarrow}(B(2),y(2))\overset{\mu_1}{\longleftrightarrow}\cdots$$

を考えると，t が偶数のとき $B(t+1)=-B(0)$,

$$\begin{aligned}&(y_1(t+1),\ y_2(t+1))\\ &=\bigl(y_1(t)^{-1},\ y_2(t)(1+y_1(t)^{-1})^{-1}\bigr)\end{aligned}\tag{1}$$

t が奇数のとき $B(t+1)=B(0)$,

$$\begin{aligned}&(y_1(t+1),\ y_2(t+1))\\ &=\bigl(y_1(t)(1+y_2(t)^{-1})^{-1},\ y_2(t)^{-1}\bigr)\end{aligned}\tag{2}$$

となります．初期 y 変数で表してみると，団変数のときと同様に「約分」と周期性が観察されます：

$$y(1)=\left(\frac{1}{y_1^0},\ \frac{y_1^0y_2^0}{1+y_1^0}\right),$$
$$y(2)=\left(\frac{y_2^0}{1+y_1^0+y_1^0y_2^0},\ \frac{1+y_1^0}{y_1^0y_2^0}\right),$$
$$y(3)=\left(\frac{1+y_1^0+y_1^0y_2^0}{y_2^0},\ \frac{1}{y_1^0(1+y_2^0)}\right),$$
$$y(4)=\left(\frac{1}{y_2^0},\ y_1(1+y_2^0)\right),$$

$$y(5) = \left(y_2^0,\ y_1^0\right).$$

式 (1), (2) をより効率的に表すことを考えます．t が偶数のとき，(1) と (2) の第一成分から

$$y_1(t+1) = y_1(t-1)^{-1}(1 + y_2(t-1)^{-1})$$

が得られ，さらに (2) の第二成分を用いると

$$y_1(t+1)y_1(t-1) = 1 + y_2(t) \tag{3}$$

となります．同様にして

$$y_2(t+2)y_2(t) = 1 + y_1(t+1) \tag{4}$$

が得られます．t が奇数のときは

$$y_1(t+1)y_1(t-1) = (1 + y_2(t)^{-1})^{-1},$$
$$y_2(t+2)y_2(t) = (1 + y_1(t+1)^{-1})^{-1}$$

となって少し見た目が異なりますが，すべての y 変数を自身の逆数で置き換えると t が偶数の場合と同じ形になります．式 (3), (4) の組を **A_2 型 Y システム**と呼びます．変数を入れ替えると初期値 $y(0)$ に一致する $y(5)$，そして初めて初期値に一致する $y(10)$ までに要したステップ数 5, 10 を，それぞれこの Y システムの**半周期**，**周期**と呼びます．

一般に，n 次反対称行列 B と n 個の頂点をもつ箙（ただしループと 2 サイクルをもたないもの）との間には 1 対 1 対応があります（「団代数ことはじめ」2 節参照）．先の 2 次行列 $B(0)$ は図 1 左側の箙に対応しますが，この箙は A_2 型の Dynkin 図形（図 2）の辺に向きをつけたものなので A_2 型箙と呼ばれています．

2. Y システムの周期性と団代数による定式化

Y システムはもともと有限次元単純 Lie 環に付随して構成されました．この節では ADE 型の Dynkin 図形に付随する Y システムで，Keller によって少し拡張されたものについて説明します．ADE 型の Dynkin 図形は図 2 を見てください（ただし E_7, E_8 型の Dynkin 図形は E_6 の図形で頂点 5 の先を頂点一つ分，または二つ分延ばした

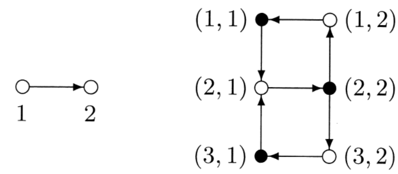


図 1　箙の例．

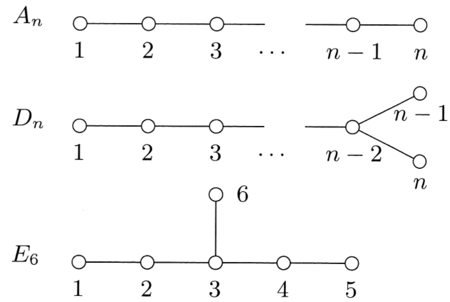


図 2　Dynkin 図形．

もの）．以後，グラフの頂点 i, j が辺で結ばれているとき $i \sim j$ と書くことにします．

X_n, X_m を ADE 型の Dynkin 図形のどれか（n, m はそれぞれの Dynkin 図形の頂点数）としたとき，従属変数 $Y_{i,j}(t)$ の満たす Y システムは次のように書かれます[4]：

$$Y_{i,j}(t+1)Y_{i,j}(t-1) = \frac{\prod_{a\sim i}(1 + Y_{a,j}(t))}{\prod_{b\sim j}(1 + (Y_{i,b}(t))^{-1})}. \tag{5}$$

ただし $i, a \in \{1, \ldots, n\}$, $j, b \in \{1, \ldots, m\}$, $t \in \mathbb{Z}$ は独立変数，そして $\prod_{a\sim i}$ は X_n の Dynkin 図形で $a \sim i$ を満たす a に関する積をとることを表します．$\prod_{b\sim j}$ も同様です．本稿では式 (5) を **$X_n \times X_m$ 型 Y システム**と呼ぶことにします．特に $X_n \times A_m$ 型の場合がもともとの Y システムで，量子群の表現論の観点から「レベル $(m+1)$ の X_n 型 Y システム」と呼ばれています．

$X_n \times X_m$ 型 Y システムの周期性はルート系の性質と深く関わっており，ルート系の対称性から決まる **Coxeter 数**を用いて表されます（次表参照）．

X_n	A_n	D_n	E_6	E_7	E_8
Coxeter 数	$n+1$	$2n-2$	12	18	30

定理[4]. $X_n \times X_m$ 型 Y システム (5) は周期 $2(h+h')$ をもつ. すなわち

$$Y_{i,j}(t+2(h+h')) = Y_{i,j}(t)$$

である. ただし X_n, X_m の Coxeter 数をそれぞれ h, h' とする.

前節の A_2 型 Y システムは本節の $A_2\times A_1$ 型 Y システムのことで, その周期は確かに $2(3+2)=10$ です.

さて, 前節に倣って Y システム (5) を団代数で定式化します[1]. まず

$$I = \{(i,j) \mid i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,m\}\}$$

を頂点集合とする $X_n \times X_m$ 型箙を次の手順で構成します：

(i) X_n の Dynkin 図形で $i \sim i'$ かつ X_m の Dynkin 図形で $j \sim j'$ のとき, $(i,j)\sim(i',j)$, $(i,j')\sim(i',j')$, $(i,j)\sim(i,j')$, $(i',j)\sim(i',j')$ となるように頂点どうしを 1 本の辺で結ぶ.

(ii) $(1,1)\to(2,1)$ から始め, すべての 4 サイクルで時計回りまたは反時計回りの向きになるよう辺に向きをつける.

これで $X_n \times X_m$ 型箙の完成です. この箙に対応する nm 次反対称行列を初期行列 $B(0)$, 初期 y 変数を $y(0)=(y^0_{ij})_{(i,j)\in I}$ とし, 以下の手続きで差分方程式を定めます：

(i) 頂点 $(1,1)$ を黒に塗ることから始め, すべての矢の両端が異なる色になるように箙の頂点を黒または白に塗る. この色分けに従って I を 2 つの部分集合 $I_\bullet$, $I_\circ$ に分け, 変異の合成 $\mu_\bullet$, $\mu_\circ$ を

$$\mu_\bullet = \prod_{(i,j)\in I_\bullet} \mu_{(i,j)}, \quad \mu_\circ = \prod_{(i,j)\in I_\circ} \mu_{(i,j)}$$

と定める (今の設定において頂点は常に二色塗り分け可能, かつ $\mu_\bullet$, $\mu_\circ$ 内の変異どうしは可換).

(ii) $\mu_\bullet$, $\mu_\circ$ を交互に初期 Y 種子 $(B(0),y(0))$ に作用させた変異の列

$$\cdots \overset{\mu_\bullet}{\longleftrightarrow} (B(-1),y(-1)) \overset{\mu_\circ}{\longleftrightarrow} (B(0),y(0))$$
$$\overset{\mu_\bullet}{\longleftrightarrow} (B(1),y(1)) \overset{\mu_\circ}{\longleftrightarrow} (B(2),y(2)) \overset{\mu_\bullet}{\longleftrightarrow} \cdots$$

を考える (A_2 型のときと同様, 行列 $B(t)$ は t の偶奇によって

$$B(t) = \begin{cases} B(0), & t:\text{偶数}, \\ -B(0), & t:\text{奇数} \end{cases}$$

となることに注意).

(iii) 集合 $P_+ \subset I\times\mathbb{Z}$ を

$$P_+ = \{((i,j),t) \mid ((i,j),t) \in I_\bullet \times 2\mathbb{Z} \\ \text{または } ((i,j),t)\in I_\circ \times (2\mathbb{Z}+1)\}$$

と定め, P_+ 上の y 変数だけで変異の関係式を書き直す.

得られた差分方程式で $Y_{ij}(t)=y_{ij}(t)$ と同一視すると (5) が得られます. P_+ は**前方変異点** (次のステップで変異が起こる頂点) の集合です. $(I\times\mathbb{Z})\setminus P_+$ 上の関係式に書き直して $Y_{ij}(t)=1/y_{ij}(t)$ と同一視しても (5) が得られます. Y システムと双対的な ***T* システム**と呼ばれる差分方程式もあり, 種子 (B,x) の変異の列を用いた同様な方法で定式化されます.

$A_3\times A_2$ 型の例を見てみましょう. 図 1 右側が $A_3 \times A_2$ 型箙を二色グラフにしたものです. y 変数の変異は t が偶数のとき

$$\begin{pmatrix} y_{11}(t+1) & y_{12}(t+1) \\ y_{21}(t+1) & y_{22}(t+1) \\ y_{31}(t+1) & y_{32}(t+1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{y_{11}(t)} & \frac{y_{12}(t)(1+y_{11}(t))}{1+1/y_{22}(t)} \\ \frac{y_{21}(t)(1+y_{22}(t))}{(1+1/y_{11}(t))(1+1/y_{31}(t))} & \frac{1}{y_{22}(t)} \\ \frac{1}{y_{31}(t)} & \frac{y_{32}(t)(1+y_{31}(t))}{1+1/y_{22}(t)} \end{pmatrix},$$

t が奇数のとき

$$= \begin{pmatrix} \frac{y_{11}(t)(1+y_{12}(t))}{1+1/y_{21}(t)} & \frac{1}{y_{12}(t)} \\ \frac{1}{y_{21}(t)} & \frac{y_{22}(t)(1+y_{21}(t))}{(1+1/y_{12}(t))(1+1/y_{32}(t))} \\ \frac{y_{31}(t)(1+y_{32}(t))}{1+1/y_{21}(t)} & \frac{1}{y_{32}(t)} \end{pmatrix}$$

と求まります. t が偶数のとき P_+ 上の関係式は

$$y_{11}(t+1)y_{11}(t-1) = \frac{1+y_{21}(t)}{1+1/y_{12}(t)},$$

$$y_{21}(t+2)y_{21}(t) \\ = \frac{(1+y_{11}(t+1))(1+y_{31}(t+1))}{1+1/y_{22}(t+1)},$$

$$y_{31}(t+1)y_{31}(t-1)=\frac{1+y_{21}(t)}{1+1/y_{32}(t)}$$

などとなり，$A_3\times A_2$ 型 Y システムが得られます．周期は $2(4+3)=14$ ですが，このくらいの例でも手計算で確認するのは結構大変です．

Fomin と Zelevinsky は，有限団代数の分類と並行して 2001 年に $X_n\times A_1$ 型 Y システムの周期性を証明しました[1]．そして Keller は，団圏（cluster category）の理論の応用として 2008 年に $X_n\times X_m$ 型 Y システムの周期性を証明しました[4]．より複雑な，ADE 型以外の場合に Y システムの周期性を証明する鍵となったのは，次に登場する「トロピカル y 変数」です．

■ 3. トロピカル y 変数 ■

B^0 を n 次正方反対称行列とし，$I=\{1,2,\dots,n\}$ と定めます．初期 y 変数 $y_1^0,\dots,y_n^0$ の有理式で，係数に引き算が入らない有理式表示を持つもの全体を $\mathbb{Q}_+(y^0)$ とします．例えば $1-y_1^0+(y_1^0)^2$ は $(1+(y_1^0)^3)/(1+y_1^0)$ と表示できるので $\mathbb{Q}_+(y^0)$ の元ですが，$(1+y_2^0)/(1-y_1^0)$ はそうではありません．初期 Y 種子 (B^0,y^0) の変異で得られる y 変数は次のような特別な性質をもちます．

定理[2]**．** 初期 Y 種子 (B^0,y^0) から変異を繰り返して得られる各 Y 種子 (B,y) の y 変数は次を満たす．
(i) $y_i\in\mathbb{Q}_+(y^0)$.
(ii) y_i は以下のように一意的に表示できる：

$$y_i=\left(\prod_{j\in I}(y_j^0)^{c_{ji}}\right)\cdot\left(\prod_{j\in I}F_j(y^0)^{b_{ji}}\right).$$

ただし縦ベクトル $c_i:=(c_{ji})_{j\in I}$ はゼロでない整数ベクトルで，すべての要素が非負または非正．$F_j(y)\in\mathbb{Q}_{>0}[y^0]$ の定数項は 1 である．

c_i は **c ベクトル**，$F_j(y^0)$ は **F 多項式**と呼ばれ，団代数の理論で重要な役割を持ちます．以下では c ベクトルが重要になります．

定義． Y 種子 (B,y) に対し，各 y 変数 y_i を初期 y 変数で Laurent 展開したときの主要部

$$[y_i]:=\prod_{j\in I}(y_j^0)^{c_{ji}}$$

を**トロピカル y 変数**と呼ぶ．そして y_i の**トロピカル符号** ε_i を以下で定める：

$$\varepsilon_i=\begin{cases}1, & c_i \text{ のすべての要素が非負,}\\ -1, & c_i \text{ のすべての要素が非正.}\end{cases}$$

定義より，初期 y 変数ではすべての $i\in I$ について $[y_i^0]=y_i^0, \varepsilon_i=1$ となります．トロピカル y 変数に誘導される変異は著しく簡単になり，c ベクトルの変異 $(B',c')=\mu_k(B,c)$ は

$$c'_{ji}=\begin{cases}-c_{ji}, & i=k,\\ c_{ji}+c_{jk}[\varepsilon_k b_{ki}]_+, & i\neq k\end{cases}\tag{6}$$

と書けます．ここで $a\in\mathbb{R}$ に対し $[a]_+:=\max[a,0]$ とします．

A_2 型の場合を見てみましょう．$y_i(t)$ の c ベクトルを $c_i(t)$，トロピカル符号を $\varepsilon_i(t)$ と書くと次の表のようになります．確かに c ベクトルは非負または非正です．

t	$(c_1(t),c_2(t))$	$(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t))$
0	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$(1,1)$
1	$\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$(-1,1)$
2	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$	$(1,-1)$
3	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$(-1,-1)$
4	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$(-1,1)$
5	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$(1,1)$

一般に，$X_n\times X_m$ 型 Y システムを c ベクトルでみると，$(i,t)\in P_+$ のとき

$$c_{ji}(t+1)=-c_{ji}(t),$$

$(i,t)\notin P_+$ のとき

$$c_{ji}(t+1) = c_{ji}(t) + \sum_{(k,t)\in P_+} c_{jk}(t)[\varepsilon_k(t)\, b_{ki}(t)]_+$$

と表せます．P_+ 上の c ベクトルの動きは y 変数よりはるかに簡単で，ルート系のように組合せ的に記述できます．一方，団圏の理論を駆使したPlamondonの結果[7]を使うと，c ベクトルの威力が次の定理に集約されます（以下の定理では係数つき団代数の種子 (B,x,y) を考えています）．

定理． 初期種子 (B^0,x^0,y^0) から変異で得られる種子 (B,x,y) と c ベクトル c_i $(i\in I)$ の間には1対1対応がある．特に，トロピカル y 変数 $[y]=([y_i])_{i\in I}$ から種子 (B,x,y) が復元できる．

まさに「トロピカル y 変数はすべてを知っている！」というわけです．この定理から，トロピカル Y システムの周期性と Y システム（および T システム）の周期性とは同値であることが分かります．このようにして $X_n\times X_m$ 型 Y システムの周期性の別証が得られ，そして ADE 型以外の Y システム（および T システム）の周期性が証明されました[3]．

4. ダイログ関数の恒等式

冒頭で登場した**Rogersのダイログ関数**（以下短くダイログ関数）とは次のように定義される関数 $L(z)$ $(0\le z\le 1)$ です：

$$L(z) = -\frac{1}{2}\int_0^z \left(\frac{\log(1-y)}{y} + \frac{\log y}{1-y}\right) dy.$$

この関数は以下の関係式を満たします：

$$L(z)+L(1-z) = \frac{\pi^2}{6}, \tag{7}$$

$$L(y)+L(z) = L\left(\frac{z(1-y)}{1-yz}\right) + L(yz) + L\left(\frac{y(1-z)}{1-yz}\right). \tag{8}$$

式(8)はダイログ関数の特徴的な5項間恒等式で，**ペンタゴン関係式**と呼ばれています．

Y システムの（周期的な）従属変数たちをダイログ関数に代入すると自明でない恒等式が得られる，という事実は幾つかの場合に知られていました．中西は団代数を使ってその仕組みを解明し，恒等式を一般化する方法を発見しました．

まず，2節の続きとして $X_n\times X_m$ 型 Y システムの場合を見てみましょう．Y システムが（半）周期 l を持つとき，y 変数の部分集合 $\mathcal{Y}_+, \mathcal{Y}_-$ を複合同順で次のようにおきます：

$$\mathcal{Y}_\pm = \{y_{ij}(t) \mid 0\le t<l,\ ((i,j),t)\in P_+,\ \varepsilon_{ij}(t)=\pm 1\}.$$

定理． $X_n\times X_m$ 型 Y システムですべての初期 y 変数について $y^0_{ij}\ge 0$ とする．このとき $l=h+h'$ とおくと次が成り立つ：

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}_+} L\left(\frac{y}{1+y}\right) = \sum_{y\in\mathcal{Y}_-} L\left(\frac{1}{1+y}\right). \tag{9}$$

ここでもトロピカル符号が要になっていることが分かりますね．この定理はペンタゴン関係式を（最も簡単な場合として）含んでいます．実際，$A_2\times A_1$ 型のとき $\mathcal{Y}_+=\{y_1(0),y_2(1),y_1(2)\}$，$\mathcal{Y}_-=\{y_2(3),y_1(4)\}$ について(9)が成立しますが，それは式(8)に

$$y=\frac{y_2^0}{1+y_2^0},\quad z=\frac{y_1^0(1+y_2^0)}{1+y_1^0(1+y_2^0)}$$

を代入したものに一致します．

最後に，Y システムに限らない周期的な Y 種子の変異の列から得られる恒等式について，結果だけ紹介します．n 次反対称整数行列 $B^0=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ と $I=\{1,\dots,n\}$ に対し I の元の列 $(k_0,\dots,k_{l-1})$ を考え，初期 Y 種子 $(B(0),y(0))=(B^0,y^0)$ から始まる変異の列を

$$(B(t+1),y(t+1)) = \mu_{k_t}(B(t),y(t)),$$
$$t=0,\dots,l-1$$

で定めます．ある n 次置換群の元 ν が存在してすべての $i,j\in I$ について $b_{ij}(l)=b_{\nu(i),\nu(j)}$ かつ $y_i(l)=y_{\nu(i)}$ が成り立つとき，$(k_0,\dots,k_{l-1})$ を (B^0,y^0) の **$\boldsymbol{\nu}$ 周期**と呼びます．特に $\nu=1$ のと

き**周期**と呼びます．

定理[5)]．I の元の列 $(k_0,\ldots,k_{l-1})$ を (B^0,y^0) の ν 周期，すべての初期 y 変数を非負とする．このとき次の恒等式が成り立つ：

$$\sum_{t=0}^{l-1}\varepsilon_t L\left(\frac{y_{k_t}(t)^{\varepsilon_t}}{1+y_{k_t}(t)^{\varepsilon_t}}\right)=0. \qquad (10)$$

ただし y 変数 $y_{k_t}(t)$ のトロピカル符号を ε_t とする．

2 節では $\mu_\bullet$, $\mu_\circ$ を用いて効率的に変異の列を定義していただけで，基本的な考え方は今と変わりません．$(k_t,t)\in I\times\mathbb{Z}$ が前方変異点，ν の位数が 2（つまり $\nu^2=1$）のとき l が半周期に相当します．式 (10) でトロピカル符号が負の項を右辺に移すと式 (9) の形が得られます．

5. むすび

この先，話は量子団代数，そして量子ダイログ関数の恒等式へと続きます．続きは中西知樹氏による概説[6)]をご参照ください．本稿であまり触れなかった背景と良い文献リストも載っています．

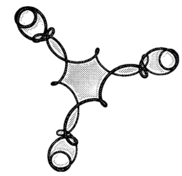
私が初めて団代数に出会ったのは 2008 年の夏，中西氏に「T/Y システムの周期性を証明するプロジェクト」へ誘われたときです．国場敦夫氏，鈴木淳史氏も一緒に 4 人で名古屋大学へ集まって勉強を始め，そのあと伊山修氏と B. Keller 氏も加わって下さり，プロジェクトはどんどん進んでいきました．その後の研究の進展，そして国内外の多くの研究者との出会いに団代数の広さを実感しています．議論をして下さったたくさんの方々にお礼申し上げます．

参考文献

1) S. Fomin and A. Zelevinsky, Y-systems and generalized associahedra, *Ann. of Math.*, **158**, 977–1018 (2003); arXiv:hep-th/0111053.
2) S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras IV. Coefficients, *Comp. Math.*, **143**, 112–164 (2003); arXiv:math/0602259.
3) R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba and T. Nakanishi, Periodicities of T-systems and Y-systems, Dilogarithm Identities, and Cluster Algebras I, II, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **49**, 1–42, 43–85 (2013); arXiv:1001.1880, 1001.1881.
4) B. Keller, Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories, *Triangulated categories*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 375, 76–160 (2010); arXiv:0807.1960.
5) T. Nakanishi, Periodicities in cluster algebras and dilogarithm identities, *Representations of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., 407–444 (2011); arXiv:1006.0632.
6) 中西知樹，団代数とその応用，2011 年日本数学会秋季総合分科会特別講演予稿集．
7) P. Plamondon, Cluster algebras via cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces, *Comp. Math.*, **147**, 1921–1954 (2011); arXiv:1004.0830.

（いのうえ・れい，千葉大学大学院理学研究科）

ミューテーションの分配級数



寺嶋 郁二

1. はじめに

近年，トポロジー，ゲージ理論，Donaldson–Thomas 理論など色々な分野に異なる様子で，クイバーの**ミューテーション**がまるで骨組みのように現れています．この記事における基本的な問題設定はこうです：

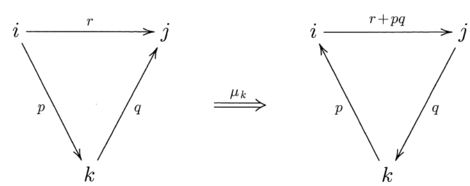
> 骨組みのクイバーのミューテーションだけを用いて，物理における分配関数のようなキーとなる量を取り出せないでしょうか？

もし，そのような量ができれば，その各分野での実現は（共通の性質を持ちながら異なる様子で）重要な量として現れるのではないでしょうか？ このような問題についての一つの提案が，これから説明する**分配級数**（partition q-series）のアイデアです．

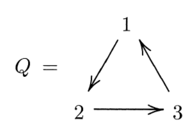
2. ミューテーション・ループ

分配級数は**ミューテーション・ループ**（mutation loop）について定義されるので，その説明からはじめましょう．ミューテーション・ループとはクイバーのミューテーションの列とその境界条件の組のことです．クイバー（quiver，箙）は向きのついたグラフのことで，クイバーの頂点 k でのミューテーション（mutation，変異）μ_k はつぎの手順で与えられる操作でした：

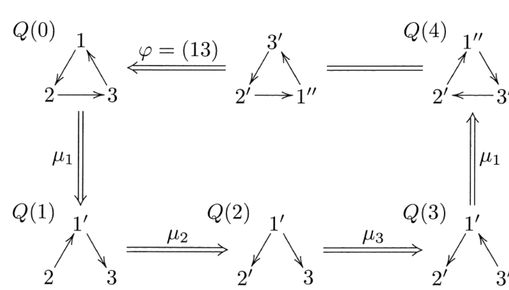
- 矢のペア $i \to k \to j$ について，矢 $i \to j$ を加える．
- k にくっついている矢の向きを逆にする．
- 2 サイクル（矢 $i \to j$ と $i \leftarrow j$ のペア）を消す．



具体例でみてみましょう．つぎのクイバー



について，頂点 $1, 2, 3, 1$ について順番にミューテーションをしてみましょう：



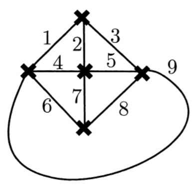
最後のクイバー $Q_T = Q(4)$ について頂点 1 と頂点 3 の役割を入れ替えると，最初のクイバー $Q = Q(0)$ と一致しています．ミューテーションの列 m（今の例の場合，$m = (1, 2, 3, 1)$）について，このような最後のクイバーと最初のクイバーの同一視 φ を m の境界条件と呼びます．ミュー

テーション・ループ (m,φ) とはミューテーションの列 m と境界条件 φ の組として定義されます．

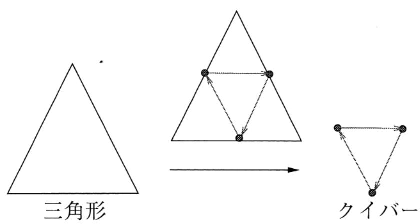
さて，ミューテーション・ループはどのような文脈で現れるでしょうか．次節ではクイバーのミューテーション・ループが 3 次元多様体の幾何の文脈で自然に現れることをみます．

3. 3 次元の幾何

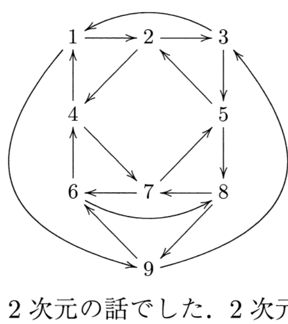
ミューテーション・ループと 3 次元多様体の関係の出発点となるのは 2 次元の多様体である曲面の三角形分割とクイバーの関係です[3, 4]．具体例として，5 つの穴の空いている球面を（穴を頂点として）三角形分割してみましょう：



つぎに各三角形にクイバーを対応させます：

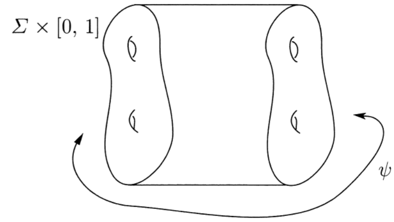


最後に各クイバーをつないで，曲面の三角形分割 T に対応するクイバー Q の完成です：

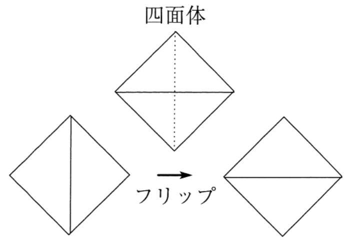


今までは 2 次元の話でした．2 次元の話から 3 次元の話に上げる役割をはたすのは三角形分割への曲面の写像類の作用です．写像類 ψ で曲面 Σ と区間 $[0,1]$ の直積を張り合わせることで 3 次元多様体 M（曲面束）ができます：

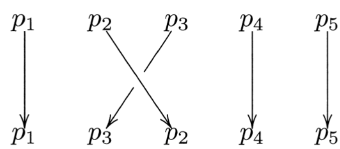
$$M := (\Sigma \times [0,1])/(x,1) \sim (\psi(x),0)$$



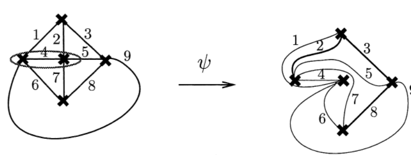
三角形分割のフリップと四面体の対応



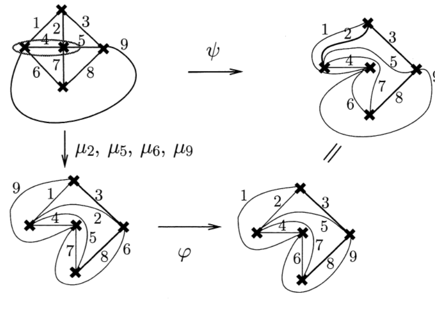
を考えると，写像類の三角形分割への作用をフリップの列で表し，最後と最初の三角形分割の同一視（境界条件）を得ることができれば，3 次元多様体 M の四面体分割を得ることができます．さきほどの球面の例で，写像類 ψ として 2 つの穴を入れ替える組ひも（braid）を考えます：



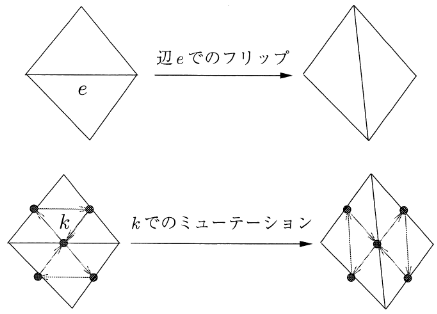
2 つの穴を入れ替えるときに三角形分割がひきずられて変化します：



この変化は，フリップの列 $\mu_2, \mu_5, \mu_6, \mu_9$ と辺の対応 φ によって表せます：



三角形分割のフリップとミューテーションの対応



によって，これをクイバーのほうで見るとミューテーションの列 $m=(2,5,6,9)$ と境界条件 φ の組，つまりミューテーション・ループとして表されます．

写像類を与えてミューテーションの列と境界条件を具体的に得る方法は確立していて，さらに y 変数の団変換（cluster transformation）を考えると3次元多様体の双曲体積やトーション（torsion）という幾何的な情報が取り出せることが分かっています[10, 16]（技術的なポイントは団変換が理想四面体のパラメータのフレーミングを与えることです）．

最近，樋上–井上は x 変数も考えるとチャーン–サイモンズ不変量も取り出せるという興味深い発見をしています[5]．

この節の最後に，対応を表にまとめておきましょう：

クイバー	曲面の三角形分割
ミューテーション	フリップ，四面体
ミューテーションの列	写像類，組ひも
ミューテーション・ループ	3次元多様体の四面体分割

3次元多様体の文脈で現れるのは特定の形をしたクイバーなので，視点を逆にすると一般のクイバーのミューテーション・ループを“3次元多様体”として新しい幾何的な対象と捉えることもできます．実際に，つぎの節で説明する分配級数は“3次元多様体の双曲体積”を量子化する試みとも思えます．

4. 分配級数

ミューテーション・ループ (m,φ) について，分配級数はつぎのステップで定義されます：

- 最初に，各クイバーの頂点 v に変数 s_v を用意します．ただし，ミューテーションした後の頂点は別の頂点と考え，境界条件 φ で同一視される頂点は同じ変数を与えることにします（この変数を s 変数と呼びます）．
- つぎに，各ミューテーション m_i について，k 変数と呼ばれる変数

$$k_i := s_i + s_i' - \sum_{j:j\to i} s_j$$

と重み

$$W(m_i) := \frac{q^{\frac{1}{2}(s_i+s_i'-\sum_{j:j\to i}s_j)(s_i+s_i'-\sum_{l:i\to l}s_l)}}{(q)_{s_i+s_i'-\sum_{j:j\to i}s_j}}$$

を考えます．ただし，ここで記号 $(q)_n$ はつぎで与えられます：

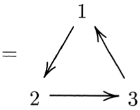
$$(q)_n = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n).$$

- 最後に，重みの積を k 変数で表して，零以上の整数で足しあげたものが分配級数です：

$$Z := \sum_{k_t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \prod_{t=1}^{T} W(m_{i_t}).$$

この定義の動機の一つには，物理的背景としてクイバーのミューテーションの列に付随した超対称3次元ゲージ理論[19]があって，その分配関数の形のエッセンスを数学的に厳密な形に抽出したものになっています．

具体例で，各ステップを確認してみましょう．2節の例，クイバー

$Q =$ 

のミューテーションの列 $m=(1,2,3,1)$ と境界条件 $\varphi: 1''=3, 2'=2, 3'=1$ を考えます．このとき，s 変数は

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_1',\ s_2',\ s_3',\ s_1''$$

であって，境界条件 $s_1''=s_3, s_2'=s_2, s_3'=s_1$ で同一視されています．つぎに k 変数は

$$
\begin{aligned}
k_1 &= s_1 + s_1' - s_3,\\
k_2 &= s_2 + s_2',\\
k_3 &= s_3 + s_3' - s_1',\\
k_4 &= s_1' + s_1'' - s_3'
\end{aligned}
$$

となり，重みは

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \frac{q^{\frac{1}{2}(s_1+s_1'-s_3)(s_1+s_1'-s_2)}}{(q)_{s_1+s_1'-s_3}},\\
W_2 &= \frac{q^{\frac{1}{2}(s_2+s_2')(s_2+s_2'-s_1')}}{(q)_{s_2+s_2'}},\\
W_3 &= \frac{q^{\frac{1}{2}(s_3+s_3'-s_1')(s_3+s_3')}}{(q)_{s_3+s_3'-s_1'}},\\
W_4 &= \frac{q^{\frac{1}{2}(s_1'+s_1''-s_3')(s_1'+s_1''-s_2')}}{(q)_{s_1'+s_1''-s_3'}}
\end{aligned}
$$

となります．最後に，分配級数は

$$
Z = \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4\geq 0} \frac{q^{\frac{1}{2}(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2-k_1k_2+k_1k_3+k_1k_4-k_2k_4+k_3k_4)}}{(q)_{k_1}(q)_{k_2}(q)_{k_3}(q)_{k_4}}
$$

となります．

もう一つ，より簡単な例として，つぎのクイバー

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$$

を考えます．このクイバーは矢印の向きを忘れると A_3 型のディンキン図形であって，各頂点が矢印がすべて入ってくる頂点（“谷”）もしくは矢印がすべて出ていく頂点（“山”）なので，A_3 型交代クイバーと呼ばれています．さて，このクイバーについて，ミューテーションの列 $m=(2,1,3)$ を考えましょう：

$$1 \to 2 \leftarrow 3 \overset{\mu_2}{\Rightarrow} 1 \leftarrow 2' \to 3 \overset{\mu_1,\mu_3}{\Rightarrow} 1' \to 2' \leftarrow 3'$$

最後のクイバーは最初のクイバーと同じなので境界条件として恒等写像を考えます．このとき，s 変数は

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_1',\ s_2',\ s_3'$$

であって，境界条件 $s_1'=s_1$, $s_2'=s_2$, $s_3'=s_3$ で同一視されています．つぎに k 変数は（s 変数と添え字をそろえると）

$$
\begin{aligned}
k_1 &= s_1 + s_1' - s_2',\\
k_2 &= s_2 + s_2' - s_1 - s_3,\\
k_3 &= s_3 + s_3' - s_2'
\end{aligned}
$$

となり，重みは

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \frac{q^{\frac{1}{2}(s_1+s_1'-s_2')(s_1+s_1')}}{(q)_{s_1+s_1'-s_2'}},\\
W_2 &= \frac{q^{\frac{1}{2}(s_2+s_2'-s_1-s_3)(s_2+s_2')}}{(q)_{s_2+s_2'-s_1-s_3}},\\
W_3 &= \frac{q^{\frac{1}{2}(s_3+s_3'-s_2')(s_3+s_3')}}{(q)_{s_3+s_3'-s_2'}}
\end{aligned}
$$

となります．最後に，分配級数は

$$
Z = \sum_{k_1,k_2,k_3\geq 0} \frac{q^{\frac{1}{4}(3k_1^2+4k_2^2+3k_3^2+4k_1k_2+2k_1k_3+4k_2k_3)}}{(q)_{k_1}(q)_{k_2}(q)_{k_3}}
$$

となります．ここで，分子の 2 次式を対称行列で表してみると

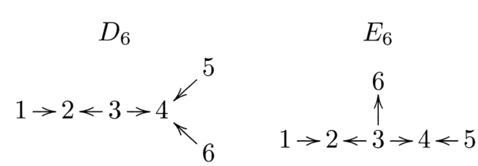
$$
D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}
$$

となり，意外なことに A_3 型のカルタン行列 C

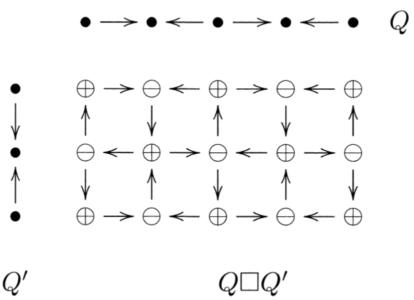
$$
C := D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

の逆行列が現れました．このことから，Lepowsky–Primc の結果[12, 20]によって，分配級数 Z がアフィン・リー環の表現論におけるストリング関数（string function）の和（のエータ関数倍）と一致することが分かります．特に，分配級数 Z は保型性という素晴らしい性質をもちます．

それでは，もっと一般の状況を考えたらどうなるでしょうか．ここでは，ADE 型交代クイバー



とその積クイバー



を考えます．積クイバー $Q\square Q'$ はプラスの頂点でのミューテーション m_+ につづいてマイナスの頂点でのミューテーション m_- をする特別なミューテーションの列 $m = m_+m_-$ をもちます．最後のクイバーは最初のクイバーと一致するので，境界条件として恒等写像 φ が選べます．このとき，ミューテーション・ループ (m, φ) の分配級数はつぎの形をしていることが分かります[6]：

$$Z(m) = \sum_{k\geq 0} \frac{q^{\frac{1}{2}k(C\otimes C'^{-1})k}}{(q)_k}.$$

ここで，行列 C はクイバー Q のディンキン型のカルタン行列であり，行列 C' はクイバー Q' のディンキン型のカルタン行列です．

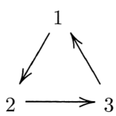
面白いことに，この分配級数の形は共型場理論の指標のフェルミオン的表示についての国場–中西–鈴木による興味深い予想[11]に現れる形と一致しています．

このことと，2 節で説明した 3 次元多様体の幾何とミューテーション・ループの関係を合わせると，分配級数が無限次元リー環の表現論と 3 次元の幾何をつなぐ新しい架け橋となることが筆者には期待されるのですが，はたしてどうでしょうか．

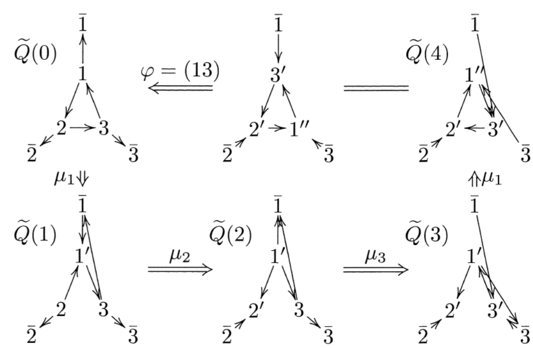
5. Donaldson–Thomas 不変量

この節では，他の不変量との関係を一つ紹介します．Kontsevich–Soibelman，長尾健太郎さん，Markus Reineke さんの仕事[9, 15, 18]をふまえて，Bernhard Keller さんはミューテーションの終赤列（reddening sequence）について，**組合せ的 Donaldson–Thomas 不変量**（combinatorial Donaldson–Thomas invariant）を量子ダイログ関数を用いて，定義しました[8]．終赤列の説明をしましょう．

まず，クイバー Q について，各頂点 v のコピー $\bar{v}$ を用意して，v から $\bar{v}$ へ向かう辺をつけ加えた新しいクイバー $\tilde{Q}$ を考えます．つぎに，Q のミューテーションの列 m を $\tilde{Q}$ に適用します．このとき，最後のクイバー $\tilde{Q}_T$ について，Q_T の頂点 w とコピーたちをつなぐ辺がすべてコピーたちから w へ向かっているとき，m を終赤列と呼びます．例えば，クイバー

$Q =$ 

のミューテーションの列 $m = (1, 2, 3, 1)$ はつぎのように終赤列の具体例になっています：



終赤列について，Brüstle–Dupont–Pérotin の結果[1]によって，Q_T の頂点 w はただ一つのコピー $\bar{v}'$ とつながれています．したがって，w と v' を同一視することで，終赤列は自然にミューテーション・ループと思えます．

一方，ミューテーション・ループについて

1. 各ミューテーションの向き，

2. 非可換変数による次数

を導入することで，分配級数を精密化することができます．この精密化を**非可換分配級数**と呼びます．ここの非可換変数 y はクイバー Q に付随する非可換代数 A_Q，上のクイバーの例では

- 生成元：y_1, y_2, y_3,
- 関係式：$y_1y_2 = qy_2y_1$，$y_2y_3 = qy_2y_3$，$y_1y_3 = q^{-1}y_3y_1$

の元です．このとき，つぎが成り立っています[7]：

ミューテーションの終赤列について，その非可換分配級数と組合せ的 Donaldson–Thomas 不変量は q を $1/q$ にすると一致します．

6. 最後に

最後に，つぎの問題を提起して終わりたいと思います[13, 14, 17]：

> 箙多様体（quiver variety）を用いて，一般のミューテーション・ループの分配級数を幾何的に解釈できるでしょうか？

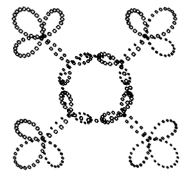
この記事は，加藤晃史さん，北山貴裕さん，長尾健太郎さん，山崎雅人さんとの共同研究にもとづいています．これらの方々をはじめとして，日頃議論をしていただいている皆さんに深く感謝します．

参考文献

1) T. Brüstle, G. Dupont, M. Pérotin, On maximal green sequences, arXiv:1205.2050, *IMRN* **16** (2014).
2) S. Cecotti, A. Neitzke, C. Vafa, R-twisting and 4d/2d correspondences, arXiv:1006.3435.
3) V. Fock, A. Goncharov, Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory, arXiv:math/0311149, *Publ. Math. IHES.* **103** (2006).
4) S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston, Cluster algebras and triangulated surfaces. part I: Cluster complexes, arXiv:math/0608367, *Acta Math.* **201** (2008).
5) K. Hikami, R. Inoue, Cluster Algebra and Complex Volume of Once-Punctured Torus Bundles and Two-Bridge Knots, arXiv:1212.6042.
6) A. Kato, Y. Terashima, Quiver mutation loops and partition q-series, arXiv:1403.6569, to appear in *Comm. Math. Phys.*
7) A. Kato, Y. Terashima, Quantum dilogarithms and partition q-series, arXiv:1408.0444, to appear in *Comm. Math. Phys.*
8) B. Keller, Quiver mutation and combinatorial DT-invariants, FPSAC '13 The 25th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (2013).
9) M. Kontsevich, Y. Soibelman, Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations, arXiv:0811.2435.
10) T. Kitayama, Y. Terashima, Torsion functions on moduli spaces in view of the cluster algebra, arXiv: 1310.3068, to appear in *Geom. Dedicata.*
11) A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki, Characters in conformal field theories from thermodynamic Bethe ansatz, arXiv:hep-th/9301018, *Modern Physics Letters A* **8** (1993).
12) J. Lepowsky, M. Primc, Structure of the standard modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, *Contemporary Math.* **46** (1985).
13) G. Lusztig, Fermionic forms and Betti numbers, arXiv:math/0005010.
14) S. Mozgovoy, Fermionic forms and quiver varieties, arXiv:math/0610084.
15) K. Nagao, Donaldson-Thomas theory and cluster algebras, arXiv:1002.4884, *Duke Math. Journal* **162** (2013).
16) K. Nagao, Y. Terashima, M. Yamazaki, Hyperbolic 3-manifolds and cluster algebras, arXiv: 1112.3106.
17) H. Nakajima, t-analogs of q-characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantm affine algebras, arXiv:math/0204185 .
18) M. Reineke, Cohomology of quiver moduli, functional equations, and integrality of Donaldson-Thomas type invariants, arXiv:0903.0261, *Compositio Math.* **147** (2011).
19) Y. Terashima, M. Yamazaki, 3d $\mathcal{N} = 2$ theories from cluster algebras, arXiv:1301.5902, *PTEP* (2014).
20) M. Terhoeven, Lift of dilogarithm to partition identities, arXiv:hep-th/9211120.

（てらしま・ゆうじ，東京工業大学大学院情報理工学研究科）

団代数と完全WKB解析



岩木 耕平

1. はじめに

本稿では（一見団代数と無縁な話題にも思える）微分方程式の解析学に隠れた団代数的構造について解説する．考察の対象となるのは，複素平面上で定義された次の2階の線形常微分方程式である：

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \eta^2 Q(z)\right)\psi(z,\eta) = 0. \qquad (1)$$

ここで z は複素変数，簡単のため $Q(z)$ は z の多項式とする．また $\eta > 0$ は大きなパラメータとする．量子力学における（定常的）**Schrödinger 方程式**は (1) の典型例であり，η は Planck 定数 $\hbar$ の逆数に相当する．表題にある**完全 WKB 解析**とは，(1) の解の $\eta \to +\infty$ での漸近挙動の研究手法である．ここで WKB とは3人の物理学者 Wentzel–Kramers–Brillouin に因み，彼らが量子力学の問題に対して編み出した手法を発展させたのが完全 WKB 解析である．以下に述べるように，解やそのモノドロミーの η-依存性を解析することで，我々は隠れた団代数的構造に辿り着くのである．まず完全 WKB 解析についての基本事項を解説し，その後団代数との関係について触れる．

2. 完全 WKB 解析

完全 WKB 解析とは，**WKB 法**と **Borel 総和法**とを組み合わせた手法であり，Voros により創始された[7)]．入門書として 5) を挙げておく．

2.1 WKB 解

WKB 法とは，(1) の“形式解”を，

$$\psi(z,\eta) = \exp\left(\int^z S(z',\eta)dz'\right),$$

$$S(z,\eta) = \sum_{n=-1}^{\infty} \eta^{-n} S_n(z) = \eta S_{-1}(z) + \cdots$$

という形に求める手法である（積分は項別の不定積分として定める）．ここで形式解とは，収束性を考慮せずに作る“解の候補”のことである．$\psi(z,\eta)$ が (1) を満たすためには，$S(z,\eta)$ は **Riccati 方程式**と呼ばれる次の方程式を満たさねばならない：

$$S^2 + \frac{dS}{dz} = \eta^2 Q(z).$$

上の $S(z,\eta)$ の展開を Riccati 方程式に代入して η^{-1} の各係数比較してみよう．すると，展開の初項は $S_{-1}(z)^2 = Q(z)$ を満たすので $S_{-1}(z) = \pm\sqrt{Q(z)}$ となる．そして，この符号 $\pm$ を固定する毎に係数 $S_n(z)$ が決まっていくことが確認できる．例えば次の2項は（$' = \frac{d}{dz}$ として）

$$S_0(z) = -\frac{Q'(z)}{4Q(z)},$$

$$S_1(z) = \pm\frac{4Q(z)Q''(z) - 5(Q'(z))^2}{32Q(z)^{5/2}}$$

となる．符号 $\pm$ は η の奇数べきの係数にのみ現れる．こうして，初項の符号 $\pm$ に応じて Riccati 方程式の2つの形式解 $S_{\pm}(z,\eta)$ を構成できた：

$$S_{\pm}(z,\eta) = \pm\eta\sqrt{Q(z)} + \left(-\frac{Q'(z)}{4Q(z)}\right) + \cdots.$$

この表示から明らかなように，$S_{\pm}(z,\eta)$ の係数は

$Q(z)$ の零点に特異性を持っている．これらは**変わり点**と呼ばれ，(微分方程式論的には通常の正則点だが) WKB 法においては特別な役割を果たす．

$S_\pm(z,\eta)$ に対応する (1) の形式解を $\psi_\pm(z,\eta)$ と表そう．実は，$S_+(z,\eta)$ の η に関する奇数べきの部分を $S_{\mathrm{odd}}(z,\eta)=\eta\sqrt{Q(z)}+\cdots$ と表すと，これら 2 つの形式解は次のように表示できる[5]：

$$\psi_\pm=\frac{1}{\sqrt{S_{\mathrm{odd}}(z,\eta)}}\exp\left(\pm\int^z S_{\mathrm{odd}}(z',\eta)dz'\right).$$

$S_{\mathrm{odd}}(z,\eta)$ が η に関する級数なので，$\psi_\pm(z,\eta)$ は次の形の（指数項を持つ）級数展開を持つ：

$$\psi_\pm=e^{\pm\eta\int^z\sqrt{Q(z')}dz'}\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{-n-\frac{1}{2}}\psi_{\pm,n}(z).$$

こうして構成された η に関する展開を持つ形式解を，(1) の **WKB 解**と呼ぶ．WKB 解の展開の初項は (1) の解の近似を与え，量子力学の近似計算に有効利用された（WKB 近似）．

2.2 Borel 総和法

上で構成した WKB 解は収束すれば (1) の解となるが，本当に収束するだろうか？ 実は，一般に WKB 解は η の級数として発散することが知られており，このままでは (1) の解にはならない．そこで，この発散級数解から解析的な解を構成するために，**Borel 総和法**を適用しよう．

十分大きな $\eta>0$ に対して，Laplace 積分

$$\mathcal{S}[\psi_\pm](z,\eta)=\int_{\mp a(z)}^{\infty}e^{-y\eta}\psi_{\pm,B}(z,y)dy \quad (2)$$

が定まり，z と η の解析函数を定めるとき，WKB 解は **Borel 総和可能**であるといい，$\mathcal{S}[\psi_\pm]$ を WKB 解 $\psi_\pm$ の **Borel 和**と呼ぶ（積分路は y-平面の実軸に平行に取る）．ここで $a(z)=\int^z\sqrt{Q(z')}dz'$，$\psi_{\pm,B}(z,y)$（$\psi_\pm$ の **Borel 変換**と呼ばれる）は

$$\psi_{\pm,B}(z,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi_{\pm,n}(z)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}(y\pm a(z))^{n-\frac{1}{2}}$$

で定義される．ここで $\psi_{\pm,n}(z)$ は WKB 解の展開係数，$\Gamma(s)$ は Euler の Γ 函数である．

いきなり Borel 和の定義を見てもピンと来ない方が多いと思うので，もう少し説明しよう．Γ 函数の定義より，単項式 $\eta^{-\alpha}$（α は $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ を満たす複素数）に対し，次の恒等式が成り立つ：

$$\eta^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-y\eta}y^{\alpha-1}dy.$$

Borel 和の定義 (2) は，この恒等式を級数に対して形式的に拡張したものである（$\psi_\pm$ が指数項 $e^{\pm\eta a(z)}$ を持つので (2) の積分の下端がずれている）．要点は，WKB 解は一般に発散するのだが，Borel 変換 $\psi_{\pm,B}(z,y)$ は各係数を Γ 函数で割っているので収束し，(2) の積分が函数を定める可能性があるということである．実際に (2) が定義できることを示すためには，積分路上に $\psi_{\pm,B}(z,y)$ の特異点が現れないことを示す必要がある．逆に，Borel 変換の特異点は Borel 総和可能性を壊す．

WKB 解の Borel 和が定義されれば，それは (1) の解析的な解を与え，さらに元の WKB 解は $\eta\to+\infty$ における**漸近展開**として復元できる：

$$\mathcal{S}[\psi_\pm](z,\eta)\sim\psi_\pm(z,\eta),\quad \eta\to+\infty.$$

この意味で，形式的な WKB 解に対し，Borel 和はその解析的な実現を与えるのである．(2) の積分は独立変数 z を固定して定義されるので，Borel 和が定まるかどうかは z に関する条件となるが，心強いことに我々は WKB 解の Borel 総和可能性の判定条件を具体的に与えることができる．

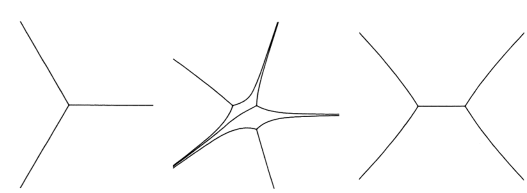
2.3 Stokes グラフと Borel 総和可能性

方程式 (1) の **Stokes グラフ**とは，

- 頂点は (1) の変わり点と無限遠点，
- 辺は (1) の **Stokes 曲線**（ある変わり点 v から生じる $\mathrm{Im}\int_v^z\sqrt{Q(z')}dz'=0$ で定まる曲線）

で与えられる z-平面上のグラフである．

図 1 はいくつかの Stokes グラフの例を示している．単純な変わり点（$Q(z)$ の 1 位の零点）からは 3 本の Stokes 曲線が生じる．変わり点から生じた Stokes 曲線はたいてい無限遠点に流れてい



(a): $Q(z)=z$　(b): $Q(z)=z(z-1)(z+i)$　(c): $Q(z)=1-z^2$

図 1　Stokes グラフの例．

くが，時折図 1 (c) のように“変わり点どうしを結ぶ” Stokes 曲線が生じることがある．このような Stokes 曲線を **Stokes セグメント**と呼ぶ．Stokes 曲線の定義から，Stokes セグメントに沿う $\sqrt{Q(z)}$ の積分量は実数でなければならず，従って Stokes セグメントは特別な条件の下でのみ存在し得る．

Borel 総和可能性の判定条件は，Stokes グラフを用いて次のように与えられる[6]：

> **定理 1** (∗): Stokes グラフが Stokes セグメントを含まないと仮定する．このとき，WKB 解 $\psi_\pm$ は各 Stokes 領域の内部において Borel 総和可能である (Stokes 領域とは Stokes 曲線により分割された z-平面内の領域である)．各 Stokes 領域で定まった Borel 和は (1) の解析的な解を与える．

Stokes 曲線上では WKB 解 $\psi_\pm$（正確にはそのどちらか一方）の Borel 和は定まらない．また，Stokes セグメントが生じると，WKB 解の Borel 変換はある種の特異点を持ち，それが Borel 総和可能性を壊すことも知られている．従って，定理 1 において (∗) は本質的な仮定である．

(∗) に加えて，(∗∗): (1) の変わり点がすべて単純であると仮定しよう．これらの仮定の下では，Stokes 曲線を境にして隣り合った Stokes 領域で定まる WKB 解の Borel 和たちが満たす**接続公式**を具体的に記述することができる[5,7]．この接続公式は η についての発散級数である WKB 解に起こる **Stokes 現象**（Borel 和が不連続に変化する現象）を記述している（これは (1) の不確定特異点 $z=\infty$ における Stokes 現象とは異なる)．接続公式は (1) の解の大域的性質を調べる上で非常に強力であり，WKB 解析的変換論と超局所解析を組み合わせた接続公式の証明も面白いのだが，残念ながらここでは触れられない．

2.4 Voros シンボル

ここで本稿において最も重要な **Voros シンボル**を導入する．Voros シンボルは WKB 解と同様に $S_{\mathrm{odd}}(z,\eta)$ の積分として定まる形式級数である．ただし，$S_{\mathrm{odd}}(z,\eta)$ の係数は z-平面上一価ではなく，積分路は $\sqrt{Q(z)}$ の Riemann 面 $\mathcal{R}$ 上の路に取る必要がある ($\mathcal{R}$ は $Q(z)$ の奇数次の零点で分岐する z-平面の 2 重被覆である)．以下，$\mathcal{R}$ 上の**パス** β，または**サイクル** γ とは，次の (相対) ホモロジー群のある元を表すことにする：$\beta \in H_1(\mathcal{R},P,\mathbb{Z})$, $\gamma \in H_1(\mathcal{R},\mathbb{Z})$．ここで P は $z=\infty$ に対応する $\mathcal{R}$（正確にはそのコンパクト化）の点の集合を表す．

> **定義 1** パス β およびサイクル γ に対して定義される η^{-1} の形式級数
> $$e^{W_\beta} = \exp\left(\int_\beta (S_{\mathrm{odd}}(z,\eta) - \eta\sqrt{Q(z)})dz\right),$$
> $$e^{V_\gamma} = \exp\left(\oint_\gamma S_{\mathrm{odd}}(z,\eta)dz\right)$$
> を，β および γ に対する **Voros シンボル**と呼ぶ．

ここで，$S_{\mathrm{odd}}(z,\eta)$ の初項の $\eta\sqrt{Q(z)}$ に対しては P の点を端点とする積分が定義できないので，パス β に対する積分を定義する際には初項を引いておく．Voros シンボルも WKB 解と同様に一般には発散するが，Stokes グラフが仮定 (∗) を満たせば Borel 総和可能となり，その Borel 和は η の解析函数を定める．

Voros シンボルは次の 2 点において重要である：

- $Q(z)$ が多項式でなく有理函数の場合にも，WKB 解や Stokes グラフは同様に定義され，定理 1 も (ほぼ) 同様に成立する．有理函数を係数に持つ方程式 (1) が仮定 (∗) および (∗∗) を満たすとき，(1) の**モノドロミー行列**（解の多価性を記述する行列）や解の接続公式は Voros シンボルの Borel 和により明示的に記述できる[5]．
- Voros シンボルは**パラメトリック Stokes 現象**と深く関わる．これは方程式が含む独立変数 z や η 以外のパラメータを連続的に変化させた際に起こる Stokes 現象である（同様の現象は非線形の **Painlevé 方程式**に対しても起こる)．その研究の鍵を握る Borel 変換の特異性の解析は Voros シンボルの解析に帰着される[1]．

3. 完全 WKB 解析から団代数へ

既に述べたように，Voros シンボルは完全 WKB 解析において重要な量である．実は，以下に見ていくように，2 種類の Voros シンボル e^{W_β}, e^{V_γ} が団代数における**団変数**（x 変数，$\hat{y}$ 変数）を実現するのである．このことを順を追って説明しよう（団代数に関する用語は本特集の中西氏の解説に従う）．

3.1 Stokes グラフの変異

以上の議論において Stokes セグメントがないという仮定 $(*)$ は本質的であったが，これ以降は Stokes セグメントが引き起こす現象に着目する．また，本稿において変わり点がすべて単純という仮定 $(**)$ は重要なので，以後常にこれを仮定する．

まず，図 1 (c) のように Stokes セグメントがひとつだけ生じている状況を考えよう．すると一般には WKB 解や Voros シンボルの Borel 総和可能性は損なわれる．そこで，(1) の係数 $Q(z)$ を連続的に変形して，“Stokes セグメントを解消する” ことを考えよう．ここでは次のような $\theta \in \mathbb{R}$ に依る変形族を考える：$Q^{(\theta)}(z) = e^{2i\theta}Q(z)$．この $Q^{(\theta)}(z)$ を係数とする方程式 (1) の Stokes グラフを G_θ と書く（G_0 は変形前の Stokes セグメントを含む Stokes グラフである）．このとき，$\theta = \pm\delta$ とし，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，問題の Stokes セグメントは解消され，$G_{\pm\delta}$ は仮定 $(*)$ を満たす（図 2 参照）．既に述べたように，Stokes セグメントに沿う $\sqrt{Q(z)}$ の積分は実数になるので，複素数を $Q(z)$ にかけることで Stokes セグメントは解消されるのである．

さて，我々は仮定 $(*)$ を満たす Stokes グラフ $G_{+\delta}$ と $G_{-\delta}$ を得たが，これらのグラフの位相的な形状が異なっていることが図 2 から読み取れる．

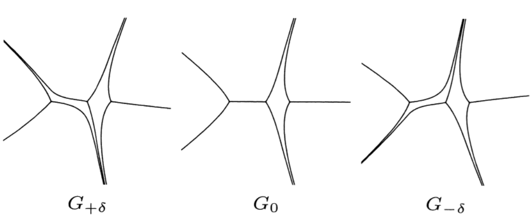


図 2 Stokes グラフの変異．

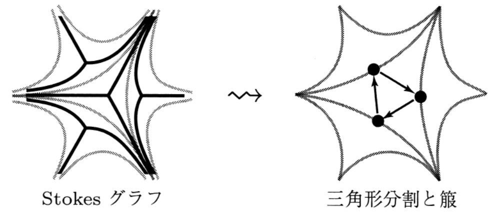


図 3 例：$Q(z)$ がある 4 次多項式の場合．

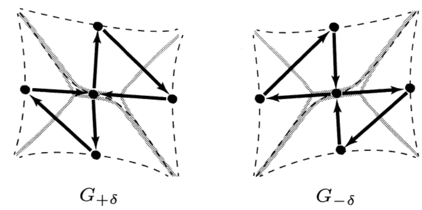


図 4 Stokes グラフと箙の変異（図は Stokes グラフの一部を表し，図に含まれる三角形分割の辺がすべて内辺であると仮定している）．

このような（Stokes セグメントの解消により起こる）Stokes グラフの形状の不連続な変化を **Stokes グラフの変異**と呼ぶことにする．図 2 はある例を示しているが，一般の場合も Stokes セグメントの近くの局所的な形状の変化は図 2 と同様である．

実は Stokes グラフの変異は団代数における**箙の変異**と整合的である，ということを次に説明しよう．まず，$G_{\pm\delta}$ のような仮定 $(*)$ を満たす Stokes グラフから，**箙**を次のように定める（図 3 参照）：

- 各 Stokes 領域内を通り，無限遠点どうしを結ぶ線分を書くと**境界付き曲面の三角形分割**が得られる（仮定 $(*)$ の下では，Stokes 領域は無限遠点の周りに生じるいくつかの 2 辺形の領域と，その他の 4 辺形の領域に分類されることが知られている．2 辺形の Stokes 領域に対応する線分が曲面の境界成分の一つと見なされる）．
- この三角形分割の内辺（境界成分でない辺）に頂点を置き，各三角形の中を時計回りに回るように頂点から頂点に矢印を書くことで箙が得られる．

図 4 から読み取れるように，Stokes グラフの変異は箙の変異を引き起こす．こうして，団代数の構成要素のうち，「箙とその変異」を完全 WKB 解析における Stokes グラフの言葉で実現できた．

3.2 Voros シンボルに起こる Stokes 現象

直前の節と同じ状況を考えよう．Stokes グラフ

$G_{\pm\delta}$ は十分小さな $\delta > 0$ に対して仮定 $(*)$ を満たしていた．従って，$Q^{(\theta)}(z)$ を係数とする方程式 (1) の Voros シンボルを $e^{W_\beta^{(\theta)}}$，$e^{V_\gamma^{(\theta)}}$ と書くと，これらは Borel 総和可能となる．さらに，その Borel 和 $\mathcal{S}[e^{W_\beta^{(\theta)}}]$ etc. の次の極限が存在する：

$$\mathcal{S}_\pm[e^{W_\beta}] = \lim_{\theta\to\pm 0} \mathcal{S}[e^{W_\beta^{(\theta)}}] \ \text{ etc.}$$

この極限 $\mathcal{S}_\pm[e^{W_\beta}]$ は，Borel 和 (2) を定義する Laplace 積分路を上下に傾けたものとして実現できるので，これも Borel 和と呼ぶことにする．実は，同じパスやサイクルに対する Voros シンボルであっても，Borel 和 $\mathcal{S}_+[e^{W_\beta}]$ と $\mathcal{S}_-[e^{W_\beta}]$ は η の解析函数として一般に一致しない．しかし，Borel 和の間の具体的な関係式が知られている[2]．

定理 2 β, γ を任意のパス，およびサイクルとする．Stokes グラフの変異において，次が成り立つ：

$$\mathcal{S}_-[e^{W_\beta}] = \mathcal{S}_+[e^{W_\beta}](1+\mathcal{S}_+[e^{V_{\gamma_0}}])^{-\langle\gamma_0,\beta\rangle},$$
$$\mathcal{S}_-[e^{V_\gamma}] = \mathcal{S}_+[e^{V_\gamma}](1+\mathcal{S}_+[e^{V_{\gamma_0}}])^{-\langle\gamma_0,\gamma\rangle}.$$

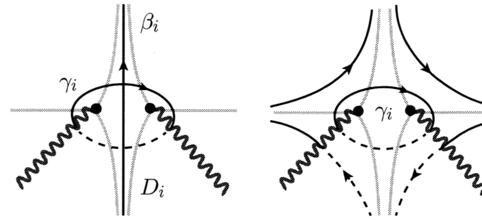
ここで γ_0 は Stokes セグメントが結ぶ 2 つの変わり点の周りを回り，$\oint_{\gamma_0}\sqrt{Q(z)}dz < 0$ なる向きを持つサイクル，$\langle,\rangle$ は交点形式である．

定理 2 は Stokes セグメントに起因する Borel 変換の特異点の解析により示される．また，上の関係式は Borel 和が不連続に変化する現象，即ち η の発散級数に対する **Stokes 現象**を記述している．

3.3 主結果

定理 2 の公式は団変数の変異の“一部”と見なすことができる．実は，ある特別なパスとサイクルに対する Voros シンボルの関係式が変異に一致するのである．最後にこの部分を説明しよう．

ここで言う特別なパスとサイクルは，Stokes 領域のうち **4 辺形**のものから定まる．まず Stokes グラフが仮定 $(*)$ を満たすとし，すべての 4 辺形 Stokes 領域にラベルを与える．これは Stokes グラフが定める箙の頂点のラベルでもあることに注意されたい（図 3 から分かるように，箙の頂点は 4 辺形 Stokes 領域と 1 対 1 に対応している）．各 4 辺形 Stokes 領域 D_i に対して，**単純パス** β_i および**単純サイクル** γ_i を図 5 (a) のように定める．



(a): β_i と γ_i.　　(b): サイクルの分解.

図 5 単純パス，単純サイクル（波線は $\sqrt{Q(z)}$ の分枝を決めるカットを表す）．

ここで β_i は D_i 内を通り無限遠点と無限遠点を結ぶパス，γ_i は D_i の境界にある 2 つの変わり点の周りを回るサイクルである（β_i や γ_i の向きを指定する必要があるが説明を省略する）．こうして，箙の各頂点 $i \in \{1,\ldots,n\}$ ごとに単純パス β_i と単純サイクル γ_i が定義された．ここで 4 辺形 Stokes 領域の数を n とした．

変異の前後の 2 つの Stokes グラフ $G_{+\delta}$ および $G_{-\delta}$ から定義される単純パス，単純サイクルをそれぞれ $\beta_1,\ldots,\beta_n,\gamma_1,\ldots,\gamma_n$，および $\beta'_1,\ldots,\beta'_n,\gamma'_1,\ldots,\gamma'_n$ とし，$i=1,\ldots,n$ に対して

$x_i = \mathcal{S}_+[e^{W_{\beta_i}}]$，$y_i = e^{\eta\oint_{\gamma_i}\sqrt{Q(z)}dz}$，$\hat{y}_i = \mathcal{S}_+[e^{V_{\gamma_i}}]$

$x'_i = \mathcal{S}_-[e^{W_{\beta'_i}}]$，$y'_i = e^{\eta\oint_{\gamma'_i}\sqrt{Q(z)}dz}$，$\hat{y}'_i = \mathcal{S}_-[e^{V_{\gamma'_i}}]$

と定めよう（y_i と y'_i は発散級数ではないので，Borel 和を取る必要はない）．このとき，

$$\hat{y}_i = y_i \prod_{j=1}^{n}(x_j)^{b_{ji}}, \quad \hat{y}'_i = y'_i \prod_{j=1}^{n}(x'_j)^{b'_{ji}}$$

が成り立つ．ここで，b_{ij}, b'_{ij} は Stokes グラフ $G_{+\delta}$ および $G_{-\delta}$ が定める箙に対応する反対称行列の (i,j)-成分である．この関係式は「サイクルをパスで分解する公式」（図 5 (b) 参照）から従い，団代数における $\hat{y}_i$ の定義と整合している（y_i は**係数**の役割を担う）．単純パスや単純サイクルどうしの関係を調べ，さらに Stokes グラフの変異に伴う Voros シンボルの変換公式（定理 2）を組み合わせることで，我々は以下の結果を得ることができる[3]．

定理 3 Stokes グラフの変異において Stokes セグメントに退化する 4 辺形 Stokes 領域のラベルを k とする．このとき，次が成り立つ：

$$x_i' = \begin{cases} x_k^{-1}\left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{[-b_{jk}]_+}\right)(1+\hat{y}_k), & i=k, \\ x_i, & i \neq k, \end{cases}$$

$$y_i' = \begin{cases} y_k^{-1}, & i=k, \\ y_i y_k^{[b_{ki}]_+}, & i \neq k, \end{cases}$$

$$\hat{y}_i' = \begin{cases} \hat{y}_k^{-1}, & i=k, \\ \hat{y}_i \hat{y}_k^{[b_{ki}]_+}(1+\hat{y}_k)^{-b_{ki}}, & i \neq k. \end{cases}$$

ここで，$[a]_+ = \max(a, 0)$ である．

上の公式は団変数の変異（に現れる2つの単項式をまとめ直したもの）に他ならない．正確には，上の公式は係数が**トロピカル半体**の元であるような**係数付き団代数**における変異（の特別な場合）になっている．定理3の公式の右辺の $(1+\hat{y}_k)$ の部分は定理2から従い，Vorosシンボルに対するStokes現象を記述している．こうして我々は完全WKB解析におけるVorosシンボルに起こるStokes現象が，団代数における変異に他ならないことを見た．応用として，完全WKB解析における**Stokes自己同型**の満たす恒等式[2)]が団代数の**周期性**から系統的に導かれることも分かった[3)]．

以上をまとめると表1のようになる．今回は $Q(z)$ を多項式に限ったが，$Q(z)$ が有理函数の場合にも同様の結果が得られる．特に，$Q(z)$ が単純極を持つ場合は今回と異なる型のStokesセグメントが生じ，Vorosシンボルに起こるStokes現象は**一般団代数**での変異となる[4)]．Teichmüller理論の研究の中で見出された一般団代数が完全WKB解析にも現れたのは興味深い．

4. おわりに

本稿では完全WKB解析と団代数との関係について述べた．前半は解析的な内容だったが，StokesグラフやRiemann面上の周期積分等の幾何学的対象が現れ，さらには団代数という代数的な側面も見えた．このように，微分方程式の研究の中で多様な数学が現れることは完全WKB解析の特色である．完全WKB解析の観点からの団代数の様々な性質（Laurent性，正値性等）の解明，また今回の結果の高階方程式への拡張等は今後の課題である．

表1　団代数と完全WKB解析．

団代数	完全WKB解析
箙とその変異	Stokesグラフとその変異
団変数（x 変数）	Vorosシンボル e^{W_β}
係数（y 変数）	$\exp(\eta \oint_\gamma \sqrt{Q(z)}dz)$
団変数（$\hat{y}$ 変数）	Vorosシンボル e^{V_γ}
団変数の変異	Stokes現象

ここまで読まれた方はWKB解の存在を忘れてしまったのではないだろうか？ Vorosシンボルは，言わば方程式(1)のモノドロミーに関する量で，団代数との関係においてWKB解が現れる余地はなかった．完全WKB解析の主役であるWKB解は団代数に何をもたらすだろうか？

本稿を終えるに当たり，今回の主結果を共に導いた共同研究者の中西知樹氏をはじめ，筆者に完全WKB解析の基礎を叩き込んで下さった竹井義次氏，河合隆裕氏，小池達也氏，青木貴史氏と数理解析研究所の月曜セミナーのメンバー，そして筆者の大学院在学中の生活を支えてくれた家族と友人に，この場を借りて深く感謝の意を表したい．

参考文献

1) T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II, *Adv. Stud. in Pure Math.*, **54**, 2009.
2) E. Delabaere, H. Dillinger and F. Pham, Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques, *Ann. Inst. Fourier*, **43** (1993).
3) K. Iwaki and T. Nakanishi, Exact WKB analysis and cluster algebras, *J. Phys. A*, **47** (2014).
4) K. Iwaki and T. Nakanishi, Exact WKB analysis and cluster algebras II: Simple poles, orbifold points, and generalized cluster algebras, 2014, arXiv:1409.4641.
5) 河合隆裕，竹井義次，『特異摂動の代数解析学』，岩波書店，1998.
6) T. Koike and R. Schäfke, On the Borel summability of WKB solutions of one-dimensional Schrödinger equations with rational potentials and its applications. 準備中.
7) A. Voros, The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **39** (1983).

（いわき・こうへい，京都大学数理解析研究所）

団代数と超対称ゲージ理論



山崎　雅人

1. 団代数と物理学者の邂逅

筆者は理論物理学者であるが，「数物連携」と名のつく研究所に所属しており数学者とも交流が深い．理論物理学者と純粋数学者とでは研究の手法も動機も大きく異なるが，昨今の素粒子理論の研究においては，純粋数学において育てられた概念に，思わぬところで出くわすことも少なくない．

本特集で取り上げられている**団代数**（クラスター代数）もその一つのめざましい例である．本稿では，超対称場の理論を研究する物理学者たちが，いかにして団代数に出会ったかを説明したい．

2. 電場と磁場のハーモニー

我々が考えたいのは我々の住む4次元時空，すなわち空間3次元，時間1次元において定義された**ゲージ場の理論**である．

ゲージ理論はゲージ群 G を指定することによって得られるのであった．簡単な例として，ゲージ群が $U(1)$ の場合を考えよう．これはおなじみの電磁気学であり，$U(1)$ ゲージ場は光子を表す．電磁気学では，光子だけではなく，光子と相互作用する物質場，例えば電子を考える．これはゲージ群のもとで，とある電荷 e をもった場のことである．

電磁場は磁場と電場からなっていたが，電子は電場のみに対してチャージを持っていた．逆に，磁場のみに対してチャージ（これを磁荷 g と書こう）を持つのが**磁気モノポール**（磁気単極子）である．ディラックが気づいたのは，モノポールと電子の両者を考えることで，マックスウェル方程式は電場と磁場の入れ替えについて対称な形になることであった．さらに彼は，電荷と磁荷の満たすべき量子化条件

$$eg \in 2\pi\hbar\mathbb{Z} \tag{1}$$

を導いたのであった[*1]．

ここまでは電荷ないし磁荷のみを持つ理論を考えたが，両方を同時に持つ粒子（**ダイオン**）を考えてもよい．その場合の量子化条件は，2つの粒子の電荷・磁荷の組（以下単にチャージと呼ぶ）を $\gamma_{i=1,2} = (e_i, g_i)$ としたとき，そのペアリング $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle$ の量子化条件として表される：

$$\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle := e_1g_2 - e_2g_1 \in 2\pi\hbar\mathbb{Z}\,. \tag{2}$$

すぐにわかるように，このペアリングは完全半対称 $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle = -\langle\gamma_2,\gamma_1\rangle$ である．ゲージ群をより一般の可換ゲージ群 $U(1)^r$ にしたときも，チャージ e, g がそれぞれ r 成分を持つベクトル $\vec{e}, \vec{g}$ になることを除けば量子化条件は同様である．(2) 式で導入したチャージのペアリングは後で見るように箙の定義に用いるので重要である．

3. 4次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のクーロンブランチ

ここまでの議論では例えばゲージ場のラグランジアンの具体的な形を直接必要としたわけではない．従って，もともとゲージ群が非可換の設定から出発しても，最終的にゲージ群がその可換部分に破れている限り，議論は同様であると期待される．

ゲージ群が破れると聞いてまず思い出すのはヒッグズ効果である：例えば $SU(3)$ ゲージ群の基本表現に属するクォークが期待値を持てばゲージ群は破れる．

*1）これらのことについては，例えば本誌2014年7月号の特集「モノポールの謎」を参照されたい．

しかし，この場合ゲージ群は一般には完全に破れてしまい，可換ゲージ群すら残らない．

そこで，通常のクォークの代わりにゲージ群に対して随伴表現で変換する場 σ（つまりゲージ群の元 g のもと $\sigma \to g^{-1}\sigma g$ と変換する場）が存在し，その場が（一般の）期待値を持ったとしよう．このとき，ゲージ群の非可換部分は破れるが，ゲージ群の可換部分群 $U(1)^r$ がすべて残ることになる（随伴表現はゲージ群の可換部分群に対して変換を受けない）．ここで r はゲージ群のランクと呼ばれる量である．

このような状況のうち典型的なものとして，**4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論**を考える．超対称性はボソンとフェルミオンを入れ替える対称性であるが，$\mathcal{N}=2$ 対称性では独立な超対称変換が 2 つ存在するので，その 2 つを組み合わせるとボソンが別のボソンに移されることになる．特に，ボソンであるゲージ場 A_μ に別のボソンのペアが存在し，それが先に述べたスカラー場 σ である．ゲージ場はゲージ群の随伴表現で変換するので，それのペアである σ も期待通り随伴表現で変換する．$\mathcal{N}=2$ 対称性を持つ理論では，σ が期待値を持つ真空が存在し，そこでは可換なゲージ場が残るので**クーロンブランチ**（クーロン枝）*2) と呼ばれる．我々はこの真空における 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論に対する低エネルギーでの振舞いを調べることにしよう．そのような低エネルギー有効理論を解くのが，90 年代半ばに現れたザイバーグ・ウィッテン理論であり，これまで本誌上でもたびたび取り上げられてきた．団代数は，この古典的な設定とその一般化を議論する中で現れてきたのである．

4. BPS 粒子から箙へ

クーロンブランチではゲージ群は可換であるが，我々の出発点は非可換ゲージ群をもつゲージ理論である．物質場の数が多すぎないとき，理論は漸近自由性を持ち我々の興味のある低エネルギーでは強結合領域にありその直接の解析は容易ではない．

ここでは，理論そのものを直接調べる代わりに，理論のスペクトラムを調べることにしよう．つまり，どういうチャージを持った安定な粒子が，幾つ存在するかを考えるのである．$\mathcal{N}=2$ 超対称性からの制限を最大限に活用するために，特に $\mathcal{N}=2$ 超対称性のうちの最大限（今の場合は半分の）超対称性を保つ粒子のみを考えることにしよう．このような粒子のことを **BPS 粒子**（今の場合は正確には½-BPS 粒子）と呼ぶ．

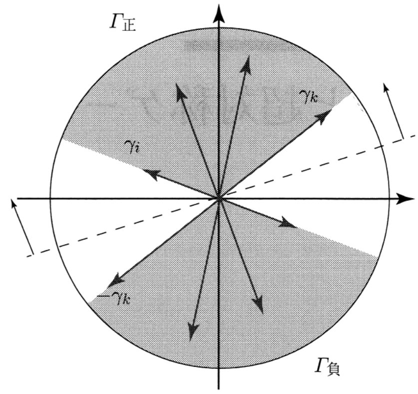


図 1 チャージのなす集合 Γ を Z_γ の偏角に応じて正負に分割する．

BPS 粒子の特徴として，チャージ γ を持つ BPS 粒子の質量は，そのチャージから定まる複素数 Z_γ（**セントラルチャージ**）の絶対値 $|Z_\gamma|$ で決まる．一方，Z_γ の位相部分は，$\mathcal{N}=2$ 対称性のうちどの $\mathcal{N}=1$ 超対称性を保つかを指定している．さらに，Z_γ は，γ に対して線形である：$Z_{\gamma_1+\gamma_2}=Z_{\gamma_1}+Z_{\gamma_2}$, $Z_{n\gamma}=nZ_\gamma$.

クーロンブランチでは破れずに残った可換ゲージ群 $U(1)^r$ が存在するので，粒子はそのゲージ群についてのチャージ $\gamma\in\Gamma$ を持つ．ここで Γ は許されるチャージの全体であり，完全反対称ペアリングを持ちそのもとで量子化条件 (2) 式を満たす．

我々は相対論的な局所場の理論から出発しているので，CPT 定理が成立し，特にチャージ γ を持つ粒子が存在すれば，逆のチャージ $-\gamma$ を持つ反粒子も存在しなければならない．したがって，粒子を数え上げるときには 2 つのうちどちらか一方だけを考えてやればよく，Γ は 2 つの交わりを持たない和に分解する：

$$\Gamma=\Gamma_{正}\cup\Gamma_{負}\ . \tag{3}$$

もっとも，この分解は一意ではない．我々の目的のためには，とある偏角 ζ を定めて先に導入した複素数 Z_γ が複素平面上で偏角が $[\zeta,\zeta+\pi]$ にあるものを集めて $\Gamma_{正}$ とすればよい（図 1）：

$$\gamma\in\Gamma_{正}\longleftrightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{-i\zeta}Z(\gamma))>0\ . \tag{4}$$

さて，ここから箙を定義しよう．$\Gamma_{正}$ を生成する基

*2) 枝と呼ばれるのは特定の点（例えば共形不変性を持つ点）から複数の「枝」が伸びてくるからなのではないかと想像する．

底を $\{\gamma_i\}$ としよう[*3)]：

$$\Gamma_{\text{正}} = \bigoplus_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_i \ . \tag{5}$$

このとき，

$$b_{ij} := \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle \tag{6}$$

により半対称行列 $B = (b_{i,j})$ を，従って箙を定義するのである（本特集中西氏の記事参照）．この箙を **BPS 箙**（えびら）と呼ぶことにしよう．既に述べたようにペアリングは反対称であったから，b_{ij} も反対称行列を与えることに注意されたい．

(6) 式の定義は天下りだが，その背後にはちゃんと物理的意味がある．BPS 粒子は 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の超対称ゲージ理論の中に存在する粒子であるが，それ自体半分の超対称性を保っている．したがって，その粒子の上にいる人の立場に立てば，4 次元 $\mathcal{N}=1$ を持つ超対称量子力学が現れたように見える（粒子に対する場の理論は量子力学である）．先に定義した箙はこの超対称量子力学（**箙超対称量子力学**）の定義データを与えるのである．

具体的には次のようにすれば良い：箙の頂点にはチャージ上で定義した基底の 1 つの元 γ_i が対応する．$\gamma = \sum_i n_i \gamma_i$ なるチャージを考えた時には i 番目の頂点にはゲージ群 $U(n_i)$ を考え，2 つの頂点 i から出て j までを結ぶ辺には，$U(n_i) \times U(n_j)$ のもとで $(n_i, \bar{n}_j)$ として変換する場を対応させる[*4)*5)]．

5. 箙の変異

さてここまでで箙とその物理的意味を説明してきたが，ここまでの説明には不満足な点がある．それは，正と負のチャージへの分割が一意ではないということだ．このことは (4) 式が偏角 ζ に依存することからも明らかである．特に，変化が起こるのは ζ が基底のある元 γ_k の偏角を越えて変化すると，$\Gamma_{\text{正}}$ が，従って箙が変化する（図 2）．

それまで正のチャージを持っていた γ_k が負のチャージを持つようになったとしよう．このとき，明らかに $-\gamma_k$ を新たな基底に加えなければならない：

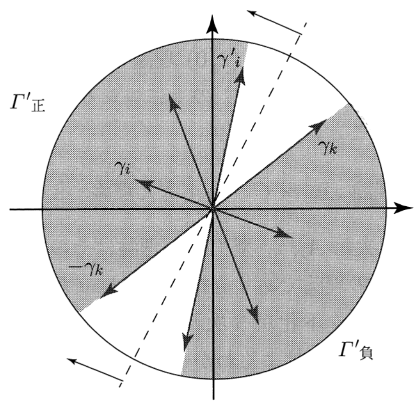


図 2 ζ の値を変化させることでチャージの正負への分割を変更する．このとき，$\Gamma_{\text{正}}$ の基底も取り替える必要がある．

$$\gamma'_k = -\gamma_k \ . \tag{7}$$

しかし，(5) を保つ必要があるので他の基底の元も取り替える必要がある．その結果は

$$\gamma_i \to \gamma_i + [b_{ik}]_+ \gamma_k \tag{8}$$

であることが知られている．ただし，ここで $[x]_+ := \max(x, 0)$．このとき，箙は (6) の定義から

$$\begin{aligned} &b_{ik} \to -b_{ik} \ , \\ &b_{ij} \to b_{ij} + [b_{ik}]_+ b_{kj} + [b_{jk}]_+ b_{ik} \end{aligned} \tag{9}$$

と変化する．これは中西氏の解説中 (5) 式で導入された箙の変異 $B \to B' = \mu_k(B)$ に他ならない．こうして我々は箙の変異に辿りついた．

(8) の証明はここでは行わないが，例えば箙の表現論の立場から文献 1) の section 3.1.2 を参照されたい．また，より直接の説明として，先に説明した箙超対称量子力学の双対性を用いたものがある．同じ箙からは 2 次元超対称場の理論も定義することができ，箙の変異はその双対性を表している[2)]．それを 1 次元量子力学に次元還元したのがここでの箙の変異を表すのである．

6. クラスター y 変数とループ演算子

クラスター代数はクラスター x 変数や y **変数**（係数）と呼ばれる変数が重要な役割を果たした．実は，我々の設定ではクラスター y 変数はクーロンブランチの座標として現れるのである．

---

*3) このような基底が存在するかどうかは明らかではない．例えば $\mathcal{N}=4$ 理論はそのような有限な基底を持たない．

*4) 正確にはスーパーポテンシャルにより相互作用も指定する必要がある．

*5) 超対称量子力学の真空のモジュライ空間は数学的にはポテンシャル付き箙の安定な表現のなすモジュライ空間であり，木村氏の解説に現れる箙多様体と近い関係にある．

ここでは一般の4次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を考える代わりに，A_{N-1} 型の6次元 $(2,0)$ 理論を点付き（つまり，穴のある）リーマン面 C の上にコンパクト化した理論を考えることにしよう：

$$6\text{次元理論} : \mathbb{R}^4 \times C \longrightarrow 4\text{次元理論} : \mathbb{R}^4 . \quad (10)$$

ここで，6次元 A_{N-1} 型 $(2,0)$ 理論はその正体が明らかでない謎の理論であり直接の役には立たないが，その S^1 コンパクト化が5次元 $\mathcal{N}=2$ $SU(N)$ ゲージ理論を与えることはよくわかっている．そこで，$\mathbb{R}^4$ のうち一方向を S^1 にコンパクト化することを考えると，

$$\begin{aligned}&6\text{次元 } A_N \text{ 型理論} : \mathbb{R}^3 \times S^1 \times C\\ &\longrightarrow 5\text{次元 } SU(N) \text{ ゲージ理論} : \mathbb{R}^3 \times C \quad (11)\end{aligned}$$

となり，それは実行できる．(11) では先に S^1 コンパクト化したが，順序を変えて先に C にコンパクト化することすると，(10) の4次元理論が3次元理論に S^1 コンパクト化されることになる：

$$4\text{次元理論} : \mathbb{R}^3 \times S^1 \longrightarrow 3\text{次元理論} : \mathbb{R}^3 . \quad (12)$$

さて，5次元理論のラグランジアンを用いて C 上の BPS 方程式を解析すると，リーマン面 C 上に**ヒッチン・モジュライ**と呼ばれるモジュライ空間が現れる．この空間は複素構造の取り方によって幾つかの記述があるが*6)，そのうちの一つは，$PSL(N,\mathbb{C})$ 平坦接続の空間であるというものである．つまり，C 上の複素接続 $\mathcal{A}$ で，

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = 0 \quad (13)$$

を満たすものの全体を，ゲージ変換で割ったものである*7)*8)．こうして現れた $PSL(N,\mathbb{C})$ 平坦接続の空間には，自然な座標（**フォック・（ゴンチャロフ）座標**）[4]が存在することが知られている．

ここでは簡単のため $N=2$ の場合を考えることにしよう．頂点を C の穴にもつ三角形分割（そのような三角形分割を**理想三角形分割**と呼ぶ）を考え，各三角形ごとに図3の箙を書くことで C 上に書かれた箙 $B=(b_{ij})$ が得られる（ただし，C は十分な数の穴を持ち，そのような三角形分割が存在すると仮定する）．このとき，箙の辺 i（理論三角形分割の辺）複素変数 y_{γ_i} を対応させるとそれがヒッチン・モジュライの座標となり，そのもとでのシンプレクティック形式は簡単な形

$$\{y_{\gamma_i}, y_{\gamma_j}\} = b_{i,j} \quad (14)$$

で与えられるというのが数学的な結果である．なお，以下 $y_{\gamma_1+\gamma_2} := y_{\gamma_1} + y_{\gamma_2}$ $(y_{n\gamma} = ny_\gamma)$ とすることで，一般の $\gamma \in \Gamma$ に対し y_γ を定義しておくと便利である．

(14) 式を古典力学でおなじみのポアソン括弧とみなすことにすれば，y_{γ_i} は有限次元の古典力学の相空間の座標に他ならない．(2) と比較すれば，辺 i は正チャージの基底 γ_i に対応され，図3から定まる箙は4次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の BPS 箙と同一視するのが自然である．

さらに，座標 y_γ はチャージ γ によって指定される赤外理論での**ループ演算子**の期待値と同定される[3]．ここでループ演算子とは，1次元的に広がった演算子のことであり，その代表例はウィルソンラインであり，ゲージ場を閉路に沿って積分したものである：4次元理論でのループ演算子は，4次元理論を S^1 上で次元還元 (12) したとき，その S^1 方向に巻きついていると すると3次元理論の粒子になる．4次元でのクーロンブランチは随伴表現に値を持つ場 σ の期待値によってパラメーター付けされていたのであった．3次元に次元還元すると，ゲージ場の S^1 方向のゲージ場の積分は3次元に新たな実スカラー場 $\tilde{\sigma}$ を与え，$\sigma, \tilde{\sigma}$ がペアをなして3次元のクーロンブランチをパラメーター付けする．したがって，ループ演算子の期待値の複素化がクーロンブランチを指定する座標を与えるというのは自然であると納得できる．

厳密に3次元を考えるのではなく，S^1 の半径 R を有限に保ったときには何が起こるだろうか？ (11) にたち戻ると，これは，5次元理論から6次元理論への持ち上げである．超弦理論の言葉では，これは IIA 型

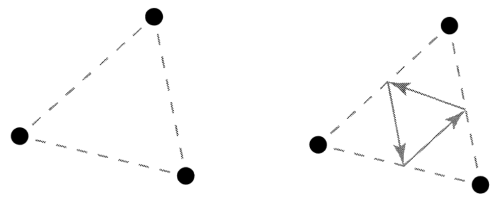


図3 理想三角形分割と，それから定める BPS 箙．

*6) ヒッチン系はハイパーケーラ多様体であり $\mathbb{P}^1$ でパラメーター付けされる複素構造を持つ．

*7) 正確にはこの他に $\mathcal{A}$ と交換するスカラー場が存在し，それらがクーロンブランチ以外の真空のブランチを記述している[5]．

*8) ただし，C の穴では $\mathcal{A}$ のホロノミーを指定する境界条件が課される．

超弦理論の5次元のブレーン（D4ブレーン）がM理論の6次元のブレーン（M5ブレーン）へ持ち上がる過程である．

このとき，3次元での粒子は4次元のループ演算子に持ち上がる．粒子とは異なり，一般の電荷・磁荷を持つループ演算子はお互いに交換しない演算子になることが知られている[7)]から，座標 y_{γ_i} は交換しない演算子 $\hat{y}_{\gamma_i}$ に置き換わるはずである．自然な量子化は有限次元相空間 (14) のポアソン括弧を演算子の交換関係に置き換えて得られる：

$$\left[\hat{y}_{\gamma_i}, \hat{y}_{\gamma_j}\right] = \mathrm{i}\hbar\, b_{i,j} \ . \tag{15}$$

あるいは，$\hat{Y}_\gamma = \mathrm{e}^{\hat{y}_\gamma}$ で定義される変数を用いることにすると，いわゆる**量子トーラス**が得られる：

$$\hat{Y}_{\gamma_1}\hat{Y}_{\gamma_2} = q^{\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle}\hat{Y}_{\gamma_2}\hat{Y}_{\gamma_1} \ . \tag{16}$$

ただし，$q := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hbar}$ であり，古典極限は $q \to 1$ となる．このように，4次元理論（従ってM理論）への持ち上げは，ヒッチン・モジュライを量子化するのである[*9)]．

7. 箙の変異とフリップ

ここまで，M理論を考えることでヒッチン・モジュライが量子化されることをみてきたが，それでは箙の変異はどう量子化されるのだろうか．

ここでは，この変異を組合せ論的に説明しておこう．箙は理想三角形分割から定まっていたのであるから，箙の曖昧さは理想三角形分割の曖昧さに起因していることになる[*10)]．

理想三角形分割の任意性は，理想四角形の対角線を取り替える操作（**フリップ**と呼ばれる）を繰り返すことによって尽くされることが知られている．そこで，フリップのもとで変数 $\hat{Y}_\gamma$ が変化するかを調べればよい．

まず，辺 k においてフリップをしたとき，対応する箙 B は頂点 (4) における変異 $\mu_k(B)$ に移り変わる（図4）．このときチャージはチャージは (7) および (8)

*9) もっとも，この主張は最終的には場の理論的による直接計算によって確かめられるべきものである．この方向については例えば文献 6) を参照．

*10) ここでは三角形分割を天下りかつ組合せ論的に与えたが，実際にはより物理的な説明がある：BPS 状態はリーマン面 C 上の測地線で与えられ，その測地線の族を考えることで，理想三角形分割を構成することができる．また，その三角形分割は ζ の値に依存し，これを変えることで三角形分割の変化を引き起こすことができる[3)]．その構成は（より厳密な設定で）本特集中の岩木氏の記事で取り扱われている．

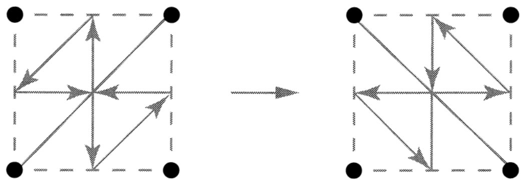


図4　理想三角形分割に対するフリップは BPS 箙の変異を引き起こす．

に従って変化するので，対応する変数 $\hat{Y}_{\gamma_k}$ も

$$\mu_k: \begin{array}{l} \hat{Y}_{\gamma_k} \to \hat{Y}_{-\gamma_k} = \hat{Y}_{\gamma_k}^{-1} \ , \\ \hat{Y}_{\gamma_i} \to \hat{Y}_{\gamma_i + [b_{ik}]_+ \gamma_k} \quad (i \neq k) \end{array} \tag{17}$$

と変化するのが自然である．実際，$\hat{Y}_{\gamma_i}$ が (14) を満たすとき，こうして変換した後の $\hat{Y}_\gamma$ は新しい箙 $B' = \mu_k(B)$ に対する (14) を満たすことが確認できる（なお，このために

$$\hat{Y}_{\gamma_i + [b_{ik}]_+ \gamma_k} = q^{-\frac{1}{2}[b_{ik}]_+ b_{ki}} \hat{Y}_{\gamma_k}^{[b_{ik}]_+} \hat{Y}_{\gamma_i} \tag{18}$$

を用いる）．しかしこれで話は終わりではない．実際には

$$K_{\gamma_k} : \hat{Y}_{\gamma_i} \to \Psi_q(\hat{Y}_{\gamma_k})^{-1} \hat{Y}_{\gamma_i} \Psi_q(\hat{Y}_{\gamma_k}) \tag{19}$$

なる変換をさらに行った合成

$$\bar{\mu}_k := K_{\gamma_k} \mu_k \tag{20}$$

がフリップによって引き起こされる変換なのである．ここで，$\Psi_q(x)$ は**量子ダイログ関数**[8)]と呼ばれる特殊関数であり，

$$\begin{aligned} &\Psi_q(qx;q) = (1+q^{1/2}x)^{-1}\Psi_q(x;q), \\ &\Psi_q(0;q) = 1 \end{aligned} \tag{21}$$

という関数関係式によって定義される．より具体的に書くと，$\bar{\mu}_k$ の作用は，$\hat{Y}_i := \hat{Y}_{\gamma_i}$ と書くことにして

$$\hat{Y}_k \to \hat{Y}_k^{-1} \tag{22}$$

および $i \neq k$ のとき，$s_{jk} := \mathrm{sgn}(b_{jk})$ と書くと

$$\hat{Y}_j \to \prod_{n=0}^{|b_{jk}|-1} \left(1 + q^{-(n+\frac{1}{2})s_{jk}} Y_k^{-s_{jk}}\right)^{-s_{jk}} Y_j \tag{23}$$

で与えられる．これは**量子クラスター代数**における**量子 y 変数**の変換則に他ならない．

特に，$q=1$ とすると．次の変換則が得られる：

$$\begin{aligned} &Y_k \to Y_k^{-1} \ , \\ &Y_j \to (1 + Y_k^{-\mathrm{sgn}(b_{jk})})^{-b_{jk}} Y_j \ . \end{aligned} \tag{24}$$

これはすでにいくつかの記事にも現れた（古典）クラスター代数の係数（y **変数**）の変換則に他ならない．

ここまではただ1回の箙の変異を考えたが，変異を繰り返すこともできる．その結果箙 B は別の箙 B' に変化し，

$$B' = \mu_k \cdots \mu_1(B) \tag{25}$$

となり，演算子 $\bar{\mu}_k$ の積は B の量子トーラスから B' の量子トーラスへの写像

$$\bar{\mu}_k \cdots \bar{\mu}_1 \tag{26}$$

を与える．この形の演算子は，コンツェビッチとソイベルマンによる**壁越え現象**における公式の記述に用いられ，関連して量子ダイログ関数の恒等式や Y システムの構成に用いられる．また，4次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の境界に現れる3次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の分配関数としても解釈することができる[10]．後者は3次元多様体の幾何にも関係しておりそれ自体興味深い理論である（本特集寺嶋氏の記事並びに文献 11, 12) を参照）．

8. 団代数の彼方へ

以上，団代数の構造が超対称ゲージ理論の一つの文脈でどのように現れるかを解説してきた．団代数とは，4次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の**ループ演算子のなす代数**，およびそれがチャージ・ラティス $\Gamma_{\text{正}}$ の取り換えでどう変化するかを記述するものに他ならないのであった．より一般の超対称ゲージ理論に対しても，ループ演算子のなす演算子を考えることにより同様の構造が得られると期待される（例えば文献 13) を参照）．

興味深いことに，純粋に数学上の興味から生まれた団代数は，超対称場の理論の物理的考察においても重要な構造であるのだ．筆者自身，当初は団代数のことを食わず嫌いで何となく敬遠していたが，折に触れて団代数のことは小耳に挟んでいた．その後，自分の研究の中でその強力さに気づき，宗旨替えをして現在に至っている*11)．この記事をきっかけに，読者の皆さんが団代数に少しでも親しみを感じて頂ければと願う．

本特集からも明らかなように団代数は様々な文脈で姿をみせる．超対称場の理論での現れは団代数の数多くの姿のうちの一つでしかないということもできるだろう*12)．しかし，ここまで議論してきた超対称ゲージ理論の物理は骨組みとしての代数的な団代数の構造そのものよりもはるかに豊穣な内容を含んでいる．それは，団代数の多様な側面を一つにまとめてみせると同時に，新たな数学の発展を刺激してきた．団代数からさらに何を汲み取ることができるのか，その先には何が待ち構えているのか，それを思うとき筆者の胸は高鳴る．

*11) 筆者の場合，一般的にいって，そうした紆余曲折の後に学んだ知識のほうが役立つことが多い．

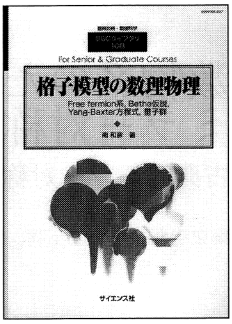
*12) 団代数の数理物理における広がりを覗くには例えば特集[14]の論文たちを参考されたい．

参考文献

1) M. Alim, S. Cecotti, C. Cordova, S. Espahbodi, A. Rastogi and C. Vafa, *Adv. Theor. Math. Phys.* **18**, 27 (2014) [arXiv:1112.3984 [hep-th]].
2) F. Benini, D.S. Park and P. Zhao, arXiv:1406.2699 [hep-th].
3) D. Gaiotto, G.W. Moore and A. Neitzke, *Adv. Theor. Math. Phys.* **17**, 241 (2013) [arXiv:1006.0146 [hep-th]]; arXiv:0907.3987 [hep-th].
4) V. Fock and A. Goncharov, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **103**, 1 (2006).
5) D. Xie and K. Yonekura, *JHEP* **1410**, 134 (2014) [arXiv:1404.7521 [hep-th]].
6) Y. Ito, T. Okuda and M. Taki, *JHEP* **1204**, 010 (2012) [arXiv:1111.4221 [hep-th]].
7) G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **138**, 1 (1978).
8) L.D. Faddeev and R.M. Kashaev, *Mod. Phys. Lett. A* **9**, 427 (1994) [hep-th/9310070].
9) M. Kontsevich and Y. Soibelman, arXiv:0811.2435 [math.AG].
10) Y. Terashima and M. Yamazaki, *PTEP* **023**, B01 (2014) [arXiv:1301.5902 [hep-th]].
11) 山崎雅人,「場の理論の分解学」, 数理科学 2012 年 10 月号.
12) 山崎雅人,『場の理論の幾何』(仮題), SGC ライブラリ，サイエンス社.
13) A. Kapustin and B. Willett, arXiv:1302.2164 [hep-th].
14) P.D. Francesco, M. Gekhtman, A. Kuniba and M. Yamazaki (ed.), "Special issue on cluster algebras in mathematical physics", `http://iopscience.iop.org/1751-8121/47/47`

（やまざき・まさひと，東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構）

書評



格子模型の数理物理

Free fermion 系，Bethe 仮説，Yang-Baxter 方程式，量子群

南和彦著，B5 判，168 頁，本体 2222 円，サイエンス社

多数の原子が集合して起きる相転移などの理解に欠かせないと考えられるのが，統計物理学における格子模型である．物理の学生を念頭におきつつ，関連ある数学徒にも有用であるように書いた，とまえがきにあり，本書は模型の数理的側面の入門書である．原理的には系のエネルギーを表す巨大な作用素を対角化できればよいのだが，それがハイゼンベルグスピン模型やイジング模型のように，これ以上単純化できないと思われるものでも難しい．1 または 2 次元だとこれらは実際には解けるのであるが，技術を要する世界である．

まず 1 章では場の演算子の基本からはじめて，1 次元イジング模型が扱われる．統計力学で基本的な概念を復習しつつ，分配関数を計算するための転送行列（本書では伝送行列）の対角化という枠組みが説明される．

2 章でより複雑な模型が登場する．いわゆる XY 模型や，1 次元イジング模型で磁場の方向を変えたもの (transeverse Ising model)，そして 2 次元イジング模型である．XY 模型は，フェルミオンの代数（クリフォード代数）への Jordan-Wigner 変換が天下りで導入されてハミルトニアンが手早く対角化される．同様に transeverse イジング模型についても，フェルミオンの変換で対角化される．そして 2 次元イジング模型が，フェルミオンへの変換による方法で解かれた後，スピンが上向きの領域と下向きの領域にどう別れるかに注目する「ダイアグラムによる方法」でも（さらに 2 通りに）解かれている．この辺はかつて伏見康治先生・庄司一郎先生の『結晶統計と代数』を古本で読んだ記憶が懐かしく思い出された．更に他にも解き方があるらしく文献が詳しい．「2 次元イジング模型は 1 次元 XY 模型を積み重ねたもの」という関係を述べて 2 章が終わる．

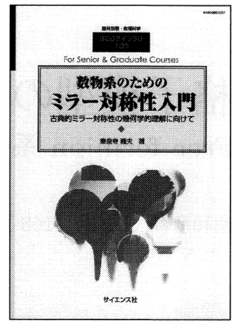
3 章では XXZ 模型と 2 次元格子の 6 頂点模型が扱われる．対角化を与えてほしい基底をある形に仮定して，実際に対角化を与える条件を書くベーテ仮説法が解説される．代数的でない超越的な方程式で解析が難しいが，この方法が他の模型にも多く適用されているほか，実は数学でも重要と思われる．XXZ 模型についても，ダイアグラム的な考察でベーテ仮設法に導いた上で，転送行列の可換性の観点からヤン・バクスター方程式とその解が導入される．そして転送行列の三角化の考察から，いわゆる Q 作用素が紹介される．Baxter が切り開いた世界だが，表現論的あるいは幾何学的由来など，今なお理解されるべき対象であろう．

ベーテ仮設の世界には 1980 年前後に，量子群の発見とこれによる表現論的理解という大きな変革が訪れた．当時の背景としては，戸田盛和先生，和達三樹先生，佐藤幹夫先生，…のソリトン研究があり，Faddeev は Baxter の模型の転送行列とサインゴルドン方程式におけるラックス行列の類似に注目したのだった．

そして 4 章で ASEP と量子群の関係が述べられる．ASEP とは asymmetric simple exclusion process（非対称排他的過程）の頭文字だが，もともとリボゾームの 1 次元的運動の模型であるそうだ．1 次元の両端から粒子が出入りする模型であり，XXZ 模型の一つの姿ということもできる．1 次元の離散的運動の世界は，他にもいわゆる箱玉系がソリトンの離散極限であることが明らかにされるなど，可解格子模型と関係が深い．代表的なソリトン方程式でもあった戸田方程式の量子離散化を手がかりの一つとして，神保は量子群を発見し，可解格子模型の出発点となるヤン・バクスター方程式の解（いわゆる R 行列）を見出す系統的方法を与えたのであった．4 章の構成は，これらを踏まえた量子群への現代的導入といえるかもしれない．欲を言えばもう少し紙幅を費やしても良かった気もするところだが，多数示されている文献で先の世界を垣間見ることができるだろう．

実際に本書の先にはいろいろな世界がある．可解格子模型の族が Hitchin 可積分系の量子離散化と考えられることから，ベーテ仮設の世界とラングランズプログラムの世界とがつながっているらしく聞けば，数学徒としても本書は覗いて損はないであろう．

長 谷 川　浩 司（東北大学大学院理学研究科）



数物系のための ミラー対称性入門

古典的ミラー対称性の幾何学的理解に向けて

秦泉寺雅夫著，B5 判，216 頁，本体 2500 円，サイエンス社

物理学の理論的研究，特にその数理的側面を調べる研究においては，解析的な証明の難しい予想の検証にコンピュータが積極的に使われるようになっている．超弦理論においては，4 次元の場の理論を特徴づけるある種の物理量が，6 次元の Calabi–Yau 多様体の幾何学と関係づくことが知られているが，この分野では答えが整数になるような数え上げの問題がいろいろ出てきて，コンピュータが大きな助けとなる．

著者の秦泉寺氏はこの分野を専門として長く研究を続けてこられた．また筆者の大学院時代には，同じ研究室の先輩としていろいろお世話になった．新しく買ってきたパソコンに Linux を苦労してインストールしたり，Mathematica や Fortran を一から学んだりしながらコツコツと研究を進めておられた．また計算結果を話して頂いたり，時々パソコンの画面を見せて頂いたりしたのを覚えている．そんな秦泉寺氏が，自身の 20 年来の研究を「修士 2 年生であった頃の自分に向けて」入門書にまとめられた．

ミラー対称性とは，異なる 2 つの Calabi–Yau 多様体を関係づける不思議な対応である．超弦理論の研究においては，この対応の存在は 1980 年代終わり頃から認識されていたが，これを利用して定量的な予想を提唱した Candelas らの論文が出たのが 1991 年で，ちょうど著者が大学院での研究を始めた時期と重なる．第 1 章では，超弦理論を研究する意義から始めて，Calabi–Yau 多様体の幾何学的情報の 4 次元素粒子模型への現れ方や，ミラー対称性の基本的な性質などが，たっぷりと紙面を割いて説明されている．歴史的な経緯は仰々しい取り上げ方はされていないけれども，当時の著者がどのようにこの分野に惹きつけられたかが伝わってくる．

ミラー対称性を論じる上で必要な，複素多様体や正則ベクトル束，チャーン類などの幾何学的道具立ては，2 章にまとめられている．本書では数学の専門家以外の読者にもやさしい言葉遣いに配慮しながら，時おり直観的な例もうまく引用して丁寧に解説してある．特にチャーン類については，その定義から計算のテクニックに至るまで，実用的な観点から説明されており，数学の教科書を読むよりわかり易い．

いわゆる古典的ミラー対称性においては，4 次元素粒子模型の湯川結合定数を決める Calabi–Yau 多様体の数学的構造を議論する．第 3 章ではそのための計算に特化した，位相的シグマ模型とよばれる 2 次元場の理論が導入される．特に A 模型の紹介では，場の理論の経路積分が正則写像のモジュライ空間上の有限次元積分に簡単化するさまが詳しく説明されている．

第 4 章ではトーリック幾何を用いて，ミラー双対な Calabi–Yau 多様体のペアを実際に構成する手順が紹介されている．必要な道具立てが手際よく導入されているが，トーリック幾何そのものを学びたい人には少々説明が物足りないかもしれない．後半はミラー対称性の検証に必要な周期積分の計算手順の解説である．この章から内容がぐっと専門的になってくるが，ところどころに「ここまでの流れをまとめると，」という短い段落が差し込まれているのが助けになる．

第 5 章では，ミラー予想の検証に必要な，Calabi–Yau 多様体への 2 次元球面の正則埋め込みの個数を数える手順が解説されている．個数を与える積分には積分領域の境界から零でない寄与があるため，これを正しくコンパクト化しなければならない．この章の前半ではこの様子が，間違ったコンパクト化を行った場合の計算例とともに詳しく説明されていてとても興味深い．後半は図形を用いた数え上げの手順の説明であるが，これもとても要領よくまとまっている．

本書全体にわたって，Calabi–Yau 多様体の具体例としては多くを取り上げず，潔く $\mathbb{CP}^4$ 内の 5 次曲面に絞って議論している．そのかわり，初学者が考え込みそうな箇所や，かなり立ち入った話題まで説明が施されていて，専門家にも読みごたえのある内容になっている．何より「ミラー対称性に興味はあるが，勉強の仕方がわからない」という人には案内書としてふさわしい．

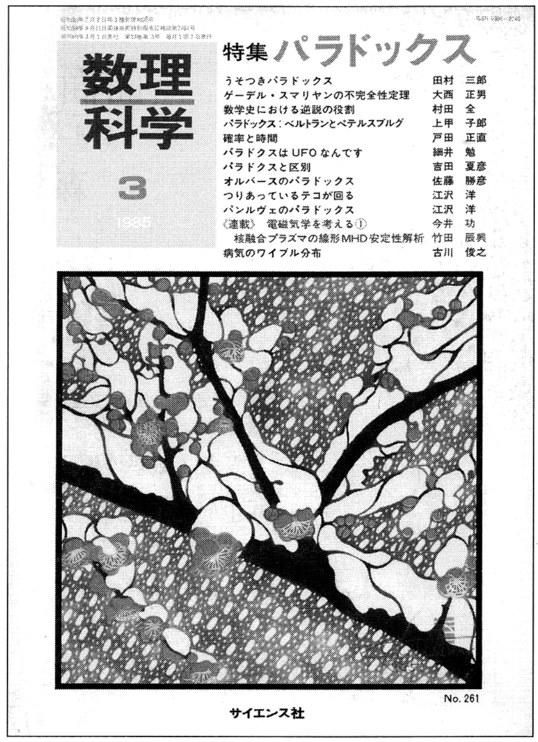
細道 和夫（国立台湾大学）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

細井　勉

1985年3月号



30年前の特集では，パラドクスについての考察を書きました．そこでは，はっきりした定義なしに議論されていたという結論になりました．誰かが，これはパラドクスだ，と思えば，それはパラドクスなのだ，という感じの恣意的な「定義」だったようだということでした．

その後，私の研究分野は大きく変わりました．『不思議の国のアリス』の著者として知られているルイス・キャロルの作品について，数学的な分析をしたり，彼の作品の翻訳・解説をしたりするようになりました．『ルイス・キャロル解読』（日本評論社），という本も書きました．そして，執筆の過程で1つの資料に出会いました．論理に関して，キャロルの既発表・未発表の作品をまとめた本で，

W.W. Bartley 編, *Lewis Carroll's Symbolic Logic*

です．その中には，キャロルが集めたたくさんのパラドクスについての考察と解説がありました．短編小説の中で「理髪店のパズル」を書いていました（『解読』の中に含めてあります）．床屋のパラドクスと呼ばれたりもしているものです．

ある理髪店に3人の理髪師 A，B，C がいたとし，3人については，(1) C が不在なら，「そのとき A が不在なら，B は店にいる」．(2) A が不在なら，B も不在．という2つの条件があてはまるということです．では，現在，C は店にいるかいないか，のどちらだろうか，ということが問題（パズル）とされました．

それは，論理学の教授の J.C. ウィルソンとの論争に発展しました．さらに，著名な論理学者たち，例えば J. ヴェンや B. ラッセル，も参入してきました．

当時，すでにブール代数は知られていました．それを使うとパズルは簡単に解けます．

論点は，現代流に述べると，日常語の「ならば (if ... then ...)」をブール代数のように捉えてよいのか，「ならば」は様相概念ではないだろうか，ということでした．キャロルとウィルソンは異なる解答を提示し，論争となりました．ウィルソンがキャロルの解答を受け入れたのはキャロルの没後のことでした．

議論の経過を眺めてみると，19世紀の論理研究と論理教育の実態が見えてきます．キャロルはふつう研究者とみなされていませんが，この論争を引き起こしたことと，論争の中での彼の主張を見ると，立派な研究者だったことが分かります．また，20世紀の論理研究の方向を予見していたことも分かります．

当時の英国の論理教育の実態は，キャロルが嘆いていたように，G. ブール，ヴェン，A. ド・モルガンなどがいた国としては，かなりお粗末だったように感じられます．それは，現在の日本にも通じるかと思います．

（ほそい・つとむ）

例題形式で探求する微積分学の基本定理
関数の性質から幾何構造を探る
第14回

曲面について (3)

森田　茂之

14.1 ガウス写像

ガウス曲率の導入と密接に関連するガウスの仕事に，現在**ガウス写像**（Gauss map）と呼ばれている考えがある．簡単に言えば，様々に変化する曲面の曲がり具合の“物差し”として単位球面 S^2 を使うことができる，というものである．定義は言われてみれば極めて自然なもので，次のようなものである．

S を xyz 空間すなわち $\mathbb{R}^3$ の中の曲面とし，$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を原点を中心とする半径 1 の球面，すなわち単位球面とする．ここで S は向き付け可能で，向き付けられているものとする．具体的には，S の各点 $\mathrm{P} \in S$ において長さ 1 の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_\mathrm{P}$ が指定されているものとする．

このとき，ガウス写像とは S から S^2 への写像

$$\gamma : S \to S^2$$

であって，次のように定義される．図 14.1 を見ていただきたい．与えられた各点 $\mathrm{P} \in S$ に対して，その行き先 $\gamma(\mathrm{P}) \in S^2$ を決めるのである．法線ベクトル

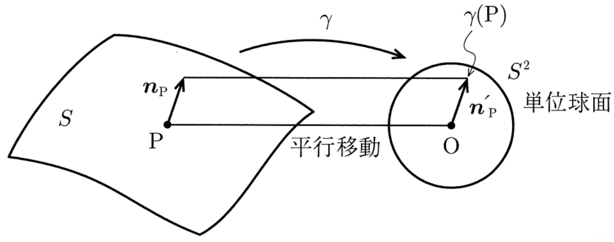


図 14.1　ガウス写像．

$\boldsymbol{n}_\mathrm{P}$ の始点は P であるが，P と原点 $\mathrm{O} \in \mathbb{R}^3$ を結ぶ線分に沿って $\boldsymbol{n}_\mathrm{P}$ を平行移動して得られるベクトルを $\boldsymbol{n}'_\mathrm{P}$ とする．このとき $\boldsymbol{n}'_\mathrm{P}$ の始点は原点で長さは 1 であるから，その終点は単位球面 S^2 上にある．そこで

$$\gamma(\mathrm{P}) = \boldsymbol{n}'_\mathrm{P} \text{ の終点} \in S^2$$

と定義するのである．

ガウス写像のターゲットは単位球面 S^2 であり，具体的な曲面である．すなわち原点からの距離が 1 の点全体のなす図形である．しかし，ガウス写像の定義を見れば，S^2 をそのように具体的な図形と見るよりは，xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ の中の "方向の全体" とみなすほうがより本質を表していると言えるだろう．このような抽象的な見方は，その後リーマンが提唱し現代幾何学の最も基本的なキーワードとなった一般の多様体という概念，より具体的にはグラスマン多様体と呼ばれる重要な図形の先駆をなすものである．さらにガウス写像は，現代幾何学の一つの柱をなすトポロジーと呼ばれる分野で基本的な分類写像や分類空間の先駆けとなっている．

次の定理は，ガウス自身によるものであるが，ガウス曲率がガウス写像の言葉で具体的に記述できるというもので，まさに単位球面が曲面の曲がり具合の "物差し" の役割を果たすことを示している．

定理 14.1（**ガウス**）　S を $\mathbb{R}^3$ の中の向き付けられた曲面とし，$\gamma : S \to S^2$ をガウス写像とする．このとき，各点 $\mathrm{P} \in S$ におけるガウス曲率 $K(\mathrm{P})$ は，P を含む S 上の小区域 σ のガウス写像による像 $\gamma(\sigma)$ の "面積" を，σ の面積で割った値の極限に等しい，すなわち，等式

$$K(\mathrm{P}) = \lim_{\mathrm{P}\in\sigma, |\sigma|\to 0} \frac{\text{“Area”}\,\gamma(\sigma)}{\mathrm{Area}\,\sigma}$$

が成立する．ここで $|\sigma|$ は σ の直径，すなわち σ 上の 2 点間の距離の最大値を表し，"Area" は符号付きの面積，すなわち γ が σ の向きを逆にして $\gamma(\sigma)$ に移す場合には，マイナスとして計算するものとする．

以下に上記のガウスの定理の証明の大体の流れを，例題を交えながら記すことにしよう．そのために，与えられた点 $\mathrm{P} \in S$ を含む S の開集合 V 上で有効な局所座標 (u, v) をとる．すなわち uv 平面上の開集合 U から V への 1 対 1 写像が

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

の形で与えられていて，2 つの行ベクトル

$$\boldsymbol{t}_u = (x_u, y_u, z_u),$$
$$\boldsymbol{t}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

を P を始点とする幾何的なベクトルと思ったとき，点 P における曲面 S への接平面 T_P の基底となっているものとする．V 上の各点は $\mathrm{P}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

と表示できるが，簡単のためにこれを $\mathrm{P}(u,v)$ と記すことにする．

> **例題 14.1** S を $\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられた曲面とし，u,v を S 上の点 $\mathrm{P}\in S$ の近くで有効な局所座標とする．このとき，点 P における法線ベクトル $\boldsymbol{n}_{\mathrm{P}}$（単に $\boldsymbol{n}$ と記す）を u,v に関して微分して得られるベクトル $\boldsymbol{n}_u$ および $\boldsymbol{n}_v$ は，P において S に接すること，すなわち T_{P} の元となることを示せ．次に，第一および第二基本形式の係数を用いることにより，それらを $\boldsymbol{t}_u$ および $\boldsymbol{t}_v$ の一次結合として具体的に表せ．

解答 $\boldsymbol{n}$ の長さは 1，すなわち $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})=1$ であるから，この式を微分することにより

$$(\boldsymbol{n}_u,\boldsymbol{n})=0,\quad (\boldsymbol{n}_v,\boldsymbol{n})=0$$

が得られる．すなわち $\boldsymbol{n}_u$ および $\boldsymbol{n}_v$ はいずれも法線ベクトルと直交する．したがって $\boldsymbol{n}_u,\ \boldsymbol{n}_v\in T_{\mathrm{P}}$ となり，前半が示された．

そこで，後半の具体的な記述を求めるために

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_u &= A\boldsymbol{t}_u + B\boldsymbol{t}_v,\\ \boldsymbol{n}_u &= C\boldsymbol{t}_u + D\boldsymbol{t}_v\end{aligned}$$

と書き，定数 A,B,C,D を決定しよう．前回に見たように，第二基本形式の係数 L,M,N は

$$L=-(\boldsymbol{n}_u,\boldsymbol{t}_u),\quad M=-(\boldsymbol{n}_u,\boldsymbol{t}_v),\quad N=-(\boldsymbol{n}_v,\boldsymbol{t}_v)$$

と表すことができる．したがって，等式

$$\begin{aligned}-L &= (\boldsymbol{n}_u,\boldsymbol{t}_u) = A(\boldsymbol{t}_u,\boldsymbol{t}_u)+B(\boldsymbol{t}_v,\boldsymbol{t}_u)\\ &= AE+BF,\\ -M &= (\boldsymbol{n}_u,\boldsymbol{t}_v) = A(\boldsymbol{t}_u,\boldsymbol{t}_v)+B(\boldsymbol{t}_v,\boldsymbol{t}_v)\\ &= AF+BG,\end{aligned}$$

が得られる．ここで行列の記法を使えば

$$\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}L\\ M\end{pmatrix}$$

となる．これから

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}L\\ M\end{pmatrix}\\ &= -\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix}G & -F\\ -F & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L\\ M\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られる．したがって

$$A = \frac{FM - GL}{EG - F^2},$$
$$B = \frac{FL - EM}{EG - F^2}$$

となる．こうして

$$\boldsymbol{n}_u = \frac{FM - GL}{EG - F^2}\boldsymbol{t}_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2}\boldsymbol{t}_v$$

となることが分かった．同様にして

$$\boldsymbol{n}_v = \frac{FN - GM}{EG - F^2}\boldsymbol{t}_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2}\boldsymbol{t}_v$$

となることが分かる．

例題 14.2　例題 14.1 の状況において，比

$$\frac{|\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v|}{|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v|}$$

の値を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v$ は $\boldsymbol{n}_u$ と $\boldsymbol{n}_v$ との外積を表す．

解答　例題 14.1 の結果を使うと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v &= \frac{(FM - GL)(FM - EN) - (FL - EM)(FN - GM)}{(EG - F^2)^2}\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v \\ &= \frac{(EG - F^2)(LN - M^2)}{(EG - F^2)^2}\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v \\ &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v \\ &= K(\mathrm{P})\,\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v\end{aligned}$$

となる．したがって，求める比の値は，ガウス曲率の絶対値

$$|K(\mathrm{P})|$$

となる．

ここで $K(\mathrm{P})$ が負の場合は，ガウス写像 γ により σ は $\gamma(\sigma)$ の上に向きを逆にして移されることに注意する．

以上の準備の基に定理 14.1 の証明の概要を記そう．図 14.2 を見ていただきたい．uv 平面上の横と縦の長さがそれぞれ $\Delta u, \Delta v$ の小さな長方形 L を考え，対応する曲面 S 上の小区域を σ とする．さらにガウス写像による σ の像 $\gamma(\sigma)$ を考えよう．L の面積はもちろん $\Delta u\Delta v$ である．一方，σ および $\gamma(\sigma)$ の面積は，それぞれ

$$\mathrm{Area}\,\sigma \sim |\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v|\,\Delta u\Delta v,$$
$$\mathrm{Area}\,\gamma(\sigma) \sim |\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v|\,\Delta u\Delta v$$

と近似できる．ここで例題 14.1 および例題 14.2，さらにその後の注意を考慮すれば，定理 14.1 の証明が得られていることが分かる．

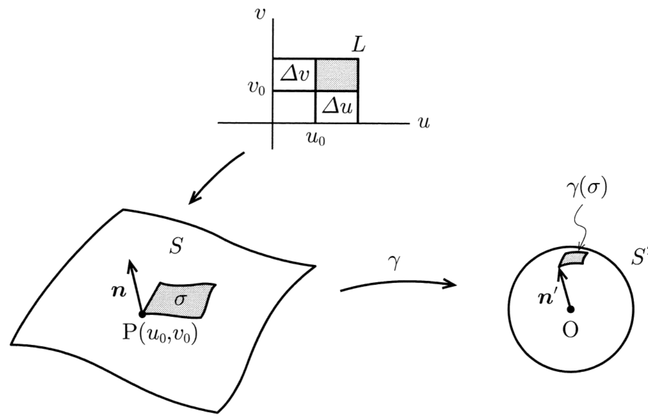


図 14.2　ガウス写像による面積の変化.

> **例題 14.3**　2 変数の C^∞ 級関数 $z = f(x,y)$ のグラフ
>
> $$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$
>
> を，$\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられた曲面と考える．このとき，ガウス写像 $\gamma : \Gamma_f \to S^2$ を具体的に記述せよ．ただし，各点 $\mathrm{P} \in \Gamma_f$ における法線ベクトルは，z 座標が正となるように取って向きを定めるものとする．

解答　点 $\mathrm{P} \in \Gamma_f$ の座標を (x_0, y_0, z_0) とすれば，P における接平面 T_{P} の方程式は

$$f_x(\mathrm{P})(x - x_0) + f_y(\mathrm{P})(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

となる．このことから，長さ 1 の上向きの法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n}_{\mathrm{P}} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2(\mathrm{P}) + f_y^2(\mathrm{P}) + 1}}(-f_x(\mathrm{P}), -f_y(\mathrm{P}), 1)$$

となることが分かる．したがって，求めるガウス写像は

$$\gamma(x,y,f(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{f_x^2(\mathrm{P}) + f_y^2(\mathrm{P}) + 1}}(-f_x(\mathrm{P}), -f_y(\mathrm{P}), 1) \in S^2$$

となる．

曲率が一定の値をもつ曲面，すなわち $K \equiv c$ ($c \in \mathbb{R}$ は定数) となる曲面を**定曲率曲面** (surfaces of constant curvature) という．半径 r の球面は $K \equiv \frac{1}{r^2}$ の定曲率曲面であり，また平面は $K \equiv 0$ の定曲率曲面である．球面が定曲率曲面であることと定理 14.1 を使えば，その曲率が $K \equiv \frac{1}{r^2}$ であることは次のようにして再確認することができる．すなわち，半径 r の球面を $S^2(r)$ とすれば，対応するガウス写像

$$\gamma : S^2(r) \to S^2$$

は，$r > 1$ あるいは $r < 1$ に応じて，それぞれ相似縮小あるいは相似拡大の写像となることが簡単な考察で分かる．$r = 1$ の場合は恒等写像である．したがって，

$$\frac{\text{“Area”}\,\gamma(\sigma)}{\mathrm{Area}\,\sigma}$$

の値は σ の取り方によらず一定で

$$\frac{\mathrm{Area}\,S^2}{\mathrm{Area}\,S^2(r)} = \frac{4\pi}{4\pi r^2} = \frac{1}{r^2}$$

となる．こうして $S^2(r)$ の曲率は $\frac{1}{r^2}$ であることが検証できた．

次に，曲率が負の定曲率曲面は存在するだろうか，という問いを考えよう．答えは肯定的であるが，以下にそのような曲面の構成方法を記す．

例題 14.4　xy 平面上の原点と点 $(0, c)$ $(c > 0)$ を結ぶ線分上に棒を置き，原点の側の端点を持って x 軸の正の方向に等速で引っ張る．このとき，他の端点が描く曲線をトラクトリックスという（図 14.3 参照）．この曲線のパラメータ表示を求めよ．

解答　図 14.3 に示すように，トラクトリックス上の点 P における接線と x 軸との交点を Q とすれば，線分 PQ の長さは常に c である．そこで，点 Q において x 軸の正の方向から時計と反対回りに半直線 $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の方向まで計った角度 u をパラメータとして採用する．u の変動範囲は $\frac{\pi}{2} < u < \pi$ である．このとき，パラメータ u に対応する点 P の座標を $(x(u), y(u))$ とすれば，まず $y(u) = c \sin u$ であることが分かる．そこで

$$x(u) = cf(u)$$

とおき，関数 $f(u)$ を求めよう．点 P における接線の勾配が $\tan u$ であるから

$$\frac{y'(u)}{x'(u)} = \tan u$$

となる．これから

$$c \cos u = cf'(u) \tan u$$

が得られ，したがって，関数 f は微分方程式

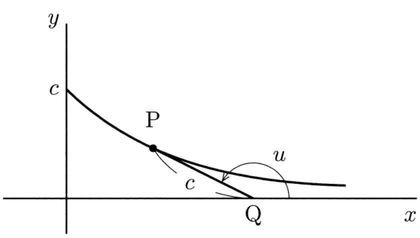


図 14.3　トラクトリックス．

$$f'(u) = \frac{\cos^2 u}{\sin u} = \frac{1}{\sin u} - \sin u$$

を満たすことが分かる．これを解くことにより

$$f(u) = \log\tan\frac{u}{2} + \cos u$$

となる．結局，求めるトラクトリックスのパラメータ表示は

$$x = c\left(\log\tan\frac{u}{2} + \cos u\right),$$
$$y = c\sin u$$

となる．

> **例題 14.5**　例題 14.4 の曲線（トラクトリックス）を，xyz 空間内で x 軸の回りに一回転して得られる曲面を**擬球**（pseudo sphere）という（図 14.4 参照）．擬球のガウス曲率を計算せよ．

解答　局所座標 u, v を次のように取る．まず u はトラクトリックスのパラメータ表示から誘導されるものを使う．次に v は以下のように定義する．擬球上の各点 P に対して，yz 平面へ正射影して得られる点を Q とし，y 軸の正の方向から yz 平面上反時計回りに線分 QO まで計った角度を v とする．このとき，擬球上の点は

$$x = c\left(\log\tan\frac{u}{2} + \cos u\right),$$
$$y = c\sin u\cos v,$$
$$z = c\sin u\sin v$$

と表すことができる．したがって，接ベクトルは

$$\boldsymbol{t}_u = c\left(\frac{1}{\sin u} - \sin u, \cos u\cos v, \cos u\sin v\right),$$
$$\boldsymbol{t}_v = c(0, -\sin u\sin v, \sin u\cos v)$$

となる．これから第一基本形式が次のように求まる．

$$E = c^2\left(\frac{1}{\sin^2 u} - 1\right),$$
$$F = 0,$$

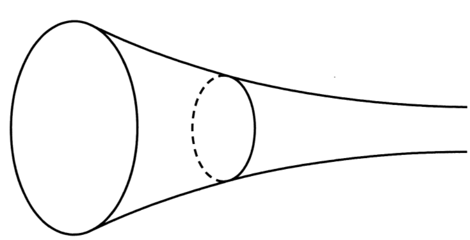


図 14.4　擬球.

$$G = c^2 \sin^2 u.$$

次に，第二基本形式を計算する．まず

$$\boldsymbol{t}_{uu} = c\left(-\frac{\cos u}{\sin^2 u} - \cos u, -\sin u \cos v, \sin u \sin v\right),$$
$$\boldsymbol{t}_{uv} = c(0, -\cos u \sin v, \cos u \cos v),$$
$$\boldsymbol{t}_{vv} = c(0, -\sin u \cos v, -\sin u \sin v)$$

が得られる．次に法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求める．

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v}{|\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v|}$$

であるが

$$\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v = c^2(\cos u \sin u, \cos^2 u \cos v, -\cos^2 u \sin v)$$

から

$$\varDelta = |\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v| = -c^2 \cos u$$

となり，したがって

$$\boldsymbol{n} = -(\sin u, \cos u \cos v, -\cos u \sin v)$$

が得られる．これらにより第二基本形式は

$$\begin{aligned} L = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{uu}) &= \frac{1}{\varDelta}c^3\left(-\frac{\cos^2 u}{\sin u} - \cos^2 u \sin u + \sin u \cos^2 v - \sin^3 u \cos^2 v\right) \\ &= c\ \cot u, \\ M = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{uv}) &= \frac{1}{\varDelta}c^3(\cos u \cos v \sin v - \cos u \sin^2 u \cos v \sin v \\ &\qquad - \cos u \cos v \sin v + \cos u \sin^2 u \cos v \sin v) \\ &= 0, \\ N = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}_{vv}) &= \frac{1}{\varDelta}c^3(\sin u \cos^2 v - \sin^3 u \cos^2 v + \sin u \sin^2 v - \sin^3 u \sin^2 v) \\ &= -c\ \cos u \sin u \end{aligned}$$

と計算される．したがって，ガウス曲率は

$$\begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-c^2 \cos^2 u}{c^4(1 - \sin^2 u)} \\ &= -\frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

となる．

こうして擬球は $K \equiv -\frac{1}{c^2}$ の定曲率曲面であることが分かった．

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

例題形式で探求する代数学のエッセンス

方程式から代数学の本質に迫る

第2回

分母の有理化

小 林　正 典

2.1 第2回の問題

第1回では，1の虚7乗根を3次方程式の解の公式を用いて求めた．解の公式では伝統的に係数から加減乗除と根号を用いて解を表示する．ただし，実は方程式がモニック（すなわち最高次の係数が1）であれば，割り算は整数によるものしか使っていない．

では，モニックでない場合，例えば $(2+\sqrt{2})x-(3-\sqrt{3})=0$ ではどうかというと，高校で次のような数を簡単にせよという問題を扱ったはずである．

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}.$$

分母の根号の符号を変えた $2-\sqrt{2}$ を分母分子に掛けると，因数分解の公式

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

が効いて，分母は $(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2$ と整数になる．これを**分母の有理化**と呼んだ．答えは $\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})=\frac{1}{2}(6-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6})$ になる．

今回は次の問題を考えてみよう．分母に3乗根が含まれている．

> **例題 2.1**　次の分母を有理化せよ．
> $$\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}.$$

2.2 因数分解の公式の利用

まずは肩慣らしをしよう．

> **問題 2.1**　次の分母を有理化せよ．
> $$\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}}.$$

注意 2.1　$2-\sqrt[3]{2}$ を分母分子に掛けても，分母は $4-\sqrt[3]{4}$ になるだけで，これは無理数である．実際，$\sqrt[3]{4}$ や $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることは，背理法により直ちに示せる（問題 2.4 の解答を参照）．

うまい方法がある．

解答　因数分解

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2) \tag{2.1}$$

を用いる．x に 2，y に $\sqrt[3]{2}$ を代入して $8+2=(2+\sqrt[3]{2})(4-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ であるから，次が分かった．

$$\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{10}(4-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}).$$

□

例題 2.1 も因数分解を用いて解ける．高校までで扱う因数分解の公式の中で最高峰と言えるであろう次を用いる．

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz). \tag{2.2}$$

例題 2.1 の解答　式 (2.2) に $x=1$, $y=3\sqrt[3]{2}$, $z=-\sqrt[3]{4}$ を代入すると，$1+54-4+18=(1+3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})(1+9\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+6)$ となるので，次を得る．

$$\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{69}(7-\sqrt[3]{2}+10\sqrt[3]{4}).$$

□

注意 2.2　式 (2.1) は式 (2.2) に $z=0$ を代入した特別な場合にあたる．

> **問題 2.2**　次の分母を有理化せよ．
>
> $$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}.$$
>
> 次を用いてもよいが，おすすめはしない．
>
> $$x^4+y^4+z^4+w^4-2(x^2y^2+x^2z^2+x^2w^2+\cdots+z^2w^2)+8xyzw$$
> $$=(x+y+z+w)(x+y-z-w)(x-y+z-w)(x-y-z+w).$$

解答　$\sqrt{6}=\sqrt{2}\sqrt{3}$ とみて，分母をまず $\sqrt{3}$（および $\sqrt{6}$）を含む部分とそうでない部分に分ける．分母を $\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}+2$ と変形したところで，$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$ と因数分解できることに気付けば

$$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2.$$

□

注意 2.3　気付かなければ，$-\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}+2$ を分母分子に掛けると，分母は $-3(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}+2)^2=-2\sqrt{2}-3$ となる．さらに分母分子に $2\sqrt{2}-3$ を掛けると，分母は 1 になり，分子は $(-\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}+2)(2\sqrt{2}-3)=(-\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+2)(2\sqrt{2}-3)=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$.

与えた式に代入しても計算できる．計算は大変であるが，類似の形の逆数の公式を一般に得られるという意味で有用である．

天下りに公式を利用することであっけなく解けてしまった．しかし，問題ごとに因数分解の式を見つけてくるのは難しそうである．理論的に攻めてみよう．

2.3 最大公約元とユークリッドの互除法

最初に 1 つ準備をしよう（定理 2.2）．K を体とし，文字 x に関する K 係数多項式の全体を $K[x]$ で表す．前回，次の定理を復習した．

定理 2.1（除法の原理） $f(x), g(x) \in K[x], g(x) \neq 0$ のとき，

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

となる $q(x) \in K[x]$ と，$g(x)$ より低次の $r(x) \in K[x]$ が，一意的に存在する．

$f(x) = q(x)g(x)$ となるとき（$g(x) = 0$ のときも含め）$g(x)$ は $f(x)$ の**約元**であるといい $g(x)|f(x)$ と書く．整数の最大公約数と同様に，多項式でも $f_1(x), f_2(x) \in K[x]$ に対し次のように定義する．$h(x) \in K[x]$ は $h(x)|f_1(x)$, $h(x)|f_2(x)$ となるとき $f_1(x), f_2(x)$ の**公約元**であるといい，さらに，任意の公約元 $k(x)$ が $k(x)|h(x)$ を満たすとき，$h(x)$ は**最大公約元**であるという．例えば $x+1$ は x^2-1 と x^3+1 の最大公約元である．$f_1(x) = f_2(x) = 0$ のときは $h(x) = 0$ であることが定義を追えば確認できるので，以下，一方（$f_2(x)$ としよう）は 0 でないとする．

除法の原理の重要な応用として，次が示される．

定理 2.2 $f_1(x), f_2(x)(\neq 0) \in K[x]$ に対し，モニックな最大公約元 $h(x) \in K[x]$ が一意的に存在する．また，

$$a(x)f_1(x) + b(x)f_2(x) = h(x)$$

となる $a(x), b(x) \in K[x]$ が存在する．

記号と補題を準備しておく．$f(x), g(x) \in K[x]$ に対し，多項式係数の一次結合の全体

$$\{a(x)f(x) + b(x)g(x) \mid a(x), b(x) \in K[x]\}$$

を $(f(x), g(x))$ で表す（順序対の記号と紛らわしいが，多項式の集合である）．この集合は $f(x)$ と $g(x)$ で**生成されるイデアル**と呼ばれるが，まだ深入りしない．

補題 2.1 $f_1(x), f_2(x)(\neq 0) \in K[x]$ とし，$f_i(x)$ を $f_{i+1}(x)$ で割った余りを $f_{i+2}(x)$ として帰納的に $f_3(x), f_4(x), \ldots$ を定める．この多項式列は，次数が減少していくのでいつかは 0 になるが，0 になる直前の式を $f_N(x)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$(f_i(x), f_{i+1}(x)) = (f_{i+1}(x), f_{i+2}(x)) \quad (1 \leq i \leq N-1)$$

証明 $f_i(x) = q_i(x)f_{i+1}(x) + f_{i+2}(x)$ と書ける．$f_{i+2}(x) = f_i(x) - q_i(x)f_{i+1}(x)$ より，互いに他の多項式係数の一次結合として表せる． □

定理 2.2 の証明 補題 2.1 の記号を用いると，

$$(f_1(x),\, f_2(x)) = (f_N(x),\, 0)$$

が成り立つ．右辺は $f_N(x)$ の倍元全体に他ならないから，左辺に含まれる $f_1(x), f_2(x)$ は $f_N(x)$ で割り切れる．逆に $f_N(x)$ は $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の一次結合で表されるから，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ の公約元は $f_N(x)$ を割り切る．従って $f_N(x)$ は $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の最大公約元である．$f_N(x)$ の最高次の係数で割って，モニックな最大公約元が $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の一次結合として表せた．

一意性を示す．モニックな最大公約元が 2 つあったとすると，互いに他を割り切るから，0 でない定数倍の関係にある．最高次の係数が共に 1 であるから等しい．　□

上のようにして最大公約元を求める方法は**ユークリッド（Euclid）の互除法**と呼ばれる．計算するアルゴリズムを与えていることも大事である．

問題 2.3　$f_1(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 2,\ f_2(x) = x^4 + x^2 + 1 \in \boldsymbol{R}[x]$ のモニックな最大公約元 $h(x)$ を求めよ．また，$h(x)$ を $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の多項式係数の一次結合として表せ．

解答　$f_1(x)$ を $f_2(x)$ で割ると $f_1(x) = 1 \cdot f_2(x) + x^3 + 1$．$f_2(x)$ を余りの $f_3(x) := x^3 + 1$ で割ると $f_2(x) = xf_3(x) + x^2 - x + 1$．$f_3(x)$ を余りの $f_4(x) := x^2 - x + 1$ で割ると $f_3(x) = (x+1)f_4(x)$ となり割り切れる．よって $f_4(x)$ は最大公約元でありモニックでもあるから，$h(x) = f_4(x) = x^2 - x + 1$．上の式を逆にたどると次を得る．$h(x) = f_4(x) = f_2(x) - xf_3(x) = f_2(x) - x(f_1(x) - f_2(x)) = -xf_1(x) + (x+1)f_2(x)$．　□

2.4 最小多項式

$2 + \sqrt{2}$ は $x^2 - 4x + 2$ の根である．このように，有理数係数[注1]の多項式の根となる複素数を一般に**代数的数**という．「分母の有理化」として，まず代数的数 α の逆数 $\frac{1}{\alpha}$ は，分母を整数とする簡単な形に書けるであろうか．

注 1　「整数係数」としても同じ．分母を払えばよい．整数係数でモニックな多項式の根が**代数的整数**．

α の満たす方程式が分かれば簡単である．例えば，$\alpha = 2 + \sqrt[3]{2}$ としよう．$\alpha - 2 = \sqrt[3]{2}$ の両辺を 3 乗して整理すると $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 10 = 0$ を得る．$\alpha (\neq 0)$ で割って $\alpha^2 - 6\alpha + 12 - \frac{10}{\alpha} = 0$ より $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{10}(\alpha^2 - 6\alpha + 12)$ となり，分母が有理化される．

しかし $1 + 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ の満たす方程式となると少し大変そうであるし，$\sqrt[3]{2}$ の場合の応用として一般にできそうな気もする．これらの理解には最小多項式が大切であるので解説しよう．

係数体は一般にしておいたほうが都合がよいので，α を体 K 上**代数的な数**とする[注2]．つまり，K 係数多項式 $g(x) (\neq 0)$ で，$g(\alpha) = 0$ となるものが存在するとする．例えば K が有理数体 $\boldsymbol{Q}$ で，$\alpha = \sqrt{2}$ のとき，$x^2 - 2$ はそのような $g(x)$ の 1 つである．$g(x)$ はいろいろあるであろうが，次数が最小のものを 1 つとり，それを $m(x)$ としよう．ただし最高次の係数は 1 にしておく．$m(x)$ は α の K 上の**最小多項式**と呼ばれる．もし $\sqrt{2}$ が $\boldsymbol{Q}$ 係数 1 次式 $ax + b$ の

注 2　K を含む体を 1 つ固定し，その中で考える．$\boldsymbol{C}$ の中で「$\boldsymbol{Q}$ 上代数的な数」=「代数的数」．

根になるなら，$\sqrt{2} = -\frac{b}{a} \in \boldsymbol{Q}$ となり矛盾する．従って $m(x)$ として x^2-2 が取れる．別の例として，x^2+1 は $i=\sqrt{-1}$ の $\boldsymbol{R}$ 上の最小多項式である．

α が K に属するときは $x-\alpha$ が K 上の最小多項式であるが，前回どこかで登場した．因数定理である．一般のときも次のように拡張される．例えば，$\sqrt{2}$ を代入して 0 になる $\boldsymbol{Q}$ 係数多項式は必ず x^2-2 で割り切れるのである．

定理 2.3（因数定理：拡張版） α を K 上代数的な数，$m(x)$ を α の K 上の最小多項式とする．このとき，$f(x) \in K[x]$ に対し次が成り立つ．

$$f(\alpha) = 0 \iff m(x) | f(x)$$

証明 除法の原理を用いる．$m(x) \neq 0$ であるから $f(x) = q(x)m(x) + r(x)$ となる $q(x), r(x) \in K[x]$ が存在する．ただし $r(x)$ の次数は $m(x)$ の次数より小さい．x に α を代入すると，$m(\alpha)=0$ を用いて $f(\alpha) = r(\alpha)$ を得る．
$\Longrightarrow$：$f(\alpha)=0$ とすると，$r(\alpha)=0$ である．$m(x)$ の次数の最小性より，$r(x)$ は式として 0 である．よって $m(x)|f(x)$．
$\Longleftarrow$：$m(x)|f(x)$ であれば，$r(x)=0$ であるから $f(\alpha)=r(\alpha)=0$． □

注意 2.4 これより最小多項式は一意的に定まることがわかる．実際，2 つあったとすると，互いに他を割り切るから，0 でない定数倍の関係にあり，最高次の係数を比較して等しいことがわかる．

それでは，$\sqrt[3]{2}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は何であろうか．$x=\sqrt[3]{2}$ は x^3-2 の根である．モニックでもあり x^3-2 が有望である．次数は最小であろうか．$\sqrt[3]{2}$ は無理数であるから $\boldsymbol{Q}$ 係数 1 次式の根にはならない．しかし 2 次式の根にもなりえないことをどうすれば示せるだろうか？

ここで「既約」という概念が有用である．

定理 2.4 α を体 K 上代数的な数とし，$f(x) \in K[x]$ はモニックで $f(\alpha)=0$ を満たすとすると，次が成り立つ．

$f(x)$ が α の K 上の最小多項式 $\iff$ $f(x)$ が K 上既約．

ただし，定数でない多項式 $f(x) \in K[x]$ は，定数でない $g(x), h(x) \in K[x]$ を用いて $f(x) = g(x)h(x)$ の形に書けないとき（要するに，これ以上因数分解できないとき），K 上**既約**であるという．

証明 $\Longleftarrow$：定理 2.3 より既約なら最小多項式の定数倍である．
$\Longrightarrow$：$f(x)$ が最小多項式であり，定数でない $g(x), h(x)$ を用いて $f(x) = g(x)h(x)$ と書けたとする．$g(x), h(x)$ は $f(x)$ より低次であり 0 ではないことに注意する．$0 = f(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha)$ であるから，$g(\alpha)=0$ または $h(\alpha)=0$．これは $f(x)$ の次数の最小性に矛盾する． □

問題 2.4 x^3-2 は $\boldsymbol{Q}$ 上既約であることを示せ．

一般的な既約性判定法については改めて考えることにして，ここでは初等的な解答を与えよう．

解答　x^3-2 が $\boldsymbol{Q}$ 上既約でないと仮定すると，1 次式を約元としてもつ．よってある有理数 $\frac{b}{a}$ が x^3-2 の根である．ただし a と b は互いに素な整数である．

式に代入して $b^3=2a^3$ となるが，右辺は偶数であるから左辺もそうであり，b は偶数である（奇数の 3 乗は奇数であるから）．よってある整数 c を用いて $b=2c$ と書ける．これより $(2c)^3=2a^3$．整理して $4c^3=a^3$．左辺は偶数であるから，右辺も偶数であり，a も偶数である．これは a と b が互いに素であることに矛盾する．よって x^3-2 は既約である．□

結局，$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを示すのと同様であった．以上より次がわかった．

命題 2.1　$\sqrt[3]{2}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は x^3-2 である．

特に，0 でない 2 次以下の $\boldsymbol{Q}$ 係数多項式に $\sqrt[3]{2}$ を代入しても 0 にならない．よって a,b,c を有理数として $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ であるとすると $a=b=c=0$ である．言い換えると，

系 2.1　$1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ は $\boldsymbol{Q}$ 上一次独立である．

問題 2.5　$\alpha=2+\sqrt[3]{2}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．

解答　この節の冒頭の例より，α はモニックな $\boldsymbol{Q}$ 係数多項式 $x^3-6x^2+12x-10$ の根である．α が 2 次以下の多項式 ax^2+bx+c（$a, b, c\in\boldsymbol{Q}$）の根になったとすると，$a(4+4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+b(2+\sqrt[3]{2})+c=0$．上の系から $\sqrt[3]{4}$ の係数 a は 0 であり，よって $b=c=0$ も言える．よってそのような多項式は 0 のみであるから，$x^3-6x^2+12x-10$ が最小多項式である．□

注意 2.5　$(x-2)^3-2$ が $\boldsymbol{Q}$ 上既約であることが，x^3-2 が $\boldsymbol{Q}$ 上既約であることから変数変換により直ちに従う（後の回で扱う予定の「アイゼンシュタインの既約性判定法」でもわかる）ので，定理 2.4 に直接依ってもよい．

2.5 代数的数の有理式

$\frac{1}{\alpha}$ に限らず，一般に α の多項式の逆数について分母の有理化を考えてみよう．

α の K 係数**有理式**，つまり K 係数多項式の比 $\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}$（$f(x), g(x)\in K[x]$，$f(\alpha)\neq 0$）で表せる数の全体を $K(\alpha)$ で表す．$K(\alpha)$ は体である．

定理 2.5　次は同値である．
(a) α が K 上代数的である．
(b) $K[\alpha]$ は体である（つまり $K(\alpha)=K[\alpha]$）．

証明　(a) $\Longrightarrow$ (b)：α が K 上代数的であるとし，最小多項式を $m(x)$ とする．$f(x)\in K[x]$ が $f(\alpha)\neq 0$ を満たすとすると，定理 2.3 より $m(x)$ は $f(x)$ の約元ではない．定理 2.4 より $m(x)$ は K 上既約であるから，1 が $m(x)$ と $f(x)$ のモニックな最大公約元である．定理 2.2 より $a(x)f(x)+b(x)m(x)=1$

となる $a(x), b(x)$ が存在する．x に α を代入すると，$m(\alpha) = 0$ より，$\frac{1}{f(\alpha)} = a(\alpha) \in K[\alpha]$ である．

(b) $\Longrightarrow$ (a)：$\alpha \neq 0$ としてよい．$\frac{1}{\alpha}$ は α の 0 でない K 係数多項式で表せる．α 倍すると α の K 係数多項式方程式を得る．□

定理 2.5 により，代数的数の有理式は，分母が有理数（よってさらに整数）にできることが保証された．$f(x)$ と $m(x)$ にユークリッドの互除法を用いて証明中の $a(x)$ を求めれば，原理的には $\frac{1}{f(\alpha)}$ を α の $\boldsymbol{Q}$ 係数多項式として計算できる．

問題 2.6　前回示したように，$t = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ は $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$ を満たす．次の分数を，$\cos\frac{2\pi}{7}$ の $\boldsymbol{Q}$ 係数多項式として表せ．

$$\frac{1}{1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}}$$

解答　t^3+t^2-2t-1 を $t+1$ で割ることで $t^3+t^2-2t-1 = (t^2-2)(t+1)+1$ を得る．よって $(1+t)^{-1} = 2 - t^2 = 2 - 4\cos^2\frac{2\pi}{7}$．□

例題 2.1 も，$\alpha = \sqrt[3]{2}$, $f(x) = 1 + 3x - x^2$, $m(x) = x^3 - 2$ として計算できる．ここまでのまとめとして，読者にお任せしよう．

2.6 代数的数と拡大次数

複数の代数的数が混ざる場合を，線形空間の次元を使って議論しよう．

K が体 L の部分体（部分集合で演算は共通）であるとき，L は K 上の線形空間になる．加法は体のもの，スカラー倍は K の元の掛け算である．その次元を体拡大 L/K の（**拡大**）**次数**といい $[L : K]$ で表す．例えば，$\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2}) = \boldsymbol{Q}[\sqrt[3]{2}]$ は $\boldsymbol{Q}$ 上 3 次元の線形空間であるから，$[\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2}) : \boldsymbol{Q}] = 3$ である．また，複素数体 $\boldsymbol{C}$ は $1, i$ を基底とする実ベクトル空間であるから，$[\boldsymbol{C} : \boldsymbol{R}] = 2$ である．

定理 2.6　αが K 上代数的 $\Longleftrightarrow$ $[K(\alpha) : K] < \infty$ が成り立つ．このとき $[K(\alpha) : K]$ は α の最小多項式の次数に等しい．

証明　$K(\alpha)$ が K 上有限次元ならば，部分空間である $K[\alpha]$ もそうである．

　α が K 上代数的

$\Longleftrightarrow$ ある正整数 d に対し $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^d$ が K 上一次従属

$\Longleftrightarrow$ $K[\alpha]$ が K 上有限次元，である．

α が K 上代数的ならば，最小多項式の次数を d とすると除法の原理により $K[\alpha]$ の元は α の $(d-1)$ 次以下の式で一意的に表せる．よって $K[\alpha]$ の K 上の次元はちょうど d である．定理 2.5 より $K(\alpha) = K[\alpha]$ である．□

系 2.2　α が K 上代数的な数であるとすると，任意の $f(\alpha) \in K(\alpha)$ も K 上代数的である．

証明　$K(f(\alpha))$ は $K(\alpha)$ の部分空間であるから，次元を比較して $[K(f(\alpha)) : K] \leq [K(\alpha) : K] < \infty$．□

注意 2.6　$\alpha(\neq 0)$ の満たす方程式から，$\frac{1}{\alpha}$ や $-\alpha$ の満たす方程式を作ることは易しい．α のべきで十分割る・係数の符号を 1 つおきに変えることでできる．

さて，2 つの文字 x, y の（2 変数）K 係数有理式（＝多項式の比）の全体を $K(x,y)$ と書く．$(K(x))(y) = K(x,y)$ であること，つまり $K(x)$ 係数の y の有理式は x, y の K 係数多項式の比に書けることが，ちょっと考えればわかる（係数の x の有理式の分母を払う）．

定理 2.7　α を K 上代数的な数，β を $K(\alpha)$ 上代数的な数とすると

$$[K(\alpha, \beta) : K] = [K(\alpha, \beta) : K(\alpha)][K(\alpha) : K]$$

が成り立つ．β も K 上代数的である．

証明　α の K 上の最小多項式の次数を d とし，β の $K(\alpha)$ 上の最小多項式の次数を e とする．$K(\alpha, \beta)$ の任意の元は $1, \beta, \ldots, \beta^{e-1}$ の $K(\alpha)$ 係数一次結合として一意的に表される．また，係数に現れる $K(\alpha)$ の元はそれぞれ $1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1}$ の K 係数一次結合として一意的に表される．これより，$K(\alpha, \beta)$ の任意の元は，$\alpha^i\beta^j$ $(0 \le i \le d-1, 0 \le j \le e-1)$ の K 係数一次結合として一意的に表されることが容易にわかる．よって次元（拡大次数）の式は示された．

$K(\beta)$ は $K(\alpha, \beta)$ の部分空間であるから，$[K(\beta) : K] \le [K(\alpha, \beta) : K] < \infty$．よって定理 2.6 より β は K 上代数的である．□

系 2.3　α, β が K 上代数的な数であるとき，$\alpha + \beta, \alpha\beta$ も K 上代数的である．

証明　β が K 上代数的であれば，もちろん $K(\alpha)$ 上でも代数的である．$K(\alpha + \beta), K(\alpha\beta)$ は $K(\alpha, \beta)$ の部分空間であることから従う．□

代数的数（$\boldsymbol{Q}$ 上代数的な複素数）の全体 $\overline{\boldsymbol{Q}}$ は，系 2.2 と系 2.3 より体である．さらに，定理 2.7 を繰り返し使うことで，代数閉体であることもわかる．興味ある読者は考えてみられたい．

注意 2.7　一般の体 K に対しても，すべての K 係数多項式の根のなす体 $\overline{K}$ が同型を除いて一意的に存在することが示される．$\overline{K}$ を K の**代数閉包**と呼ぶ．

分母の有理化としては，「2 つの代数的数の比 $\frac{\beta}{\alpha}$ は，分母が正の整数，分子が代数的整数となる分数で表せる」ことが，$\overline{\boldsymbol{Q}}$ が体であることと以下から従う．

定理 2.8　任意の代数的数 α に対し，ある正の整数倍が代数的整数になる．

証明　α の満たす整数係数 d 次方程式に，最高次の係数 a_0（正としてよい）の $(d-1)$ 乗を掛ければ，$a_0\alpha$ のモニックな整数係数方程式になる．□

「根号の符号を変えたものを掛ければよい」といった公式の不思議が残った．これはまた改めて扱うことにしよう．

（こばやし・まさのり，首都大学東京大学院理工学研究科）

経路積分と量子解析

いかにして量子現象を数理的に扱うか

第7回

手順の分離と指数積公式(1)

鈴木　増雄

7.1 はじめに

前回までは，最先端における物理の研究成果にまで踏み込んで解説してきたので[1]，専門外の読者には難解な部分もあったのではないかと危惧している．これから，一般的な数学的処法である指数積公式と量子解析の話に入っていきたい．その導入として，「手順の分離と統合」という考え方[2]を紹介する．わかり易くするため，まず魔方陣[3]を例に説明する．次に，非可換な演算子 A と B の和の指数演算子の分解公式に関して詳しく解説する．

7.2 手順の分離による魔方陣の解き方

昨年の9月にギリシャのロドス島で開催された数値解析・応用数学の国際会議（ICNAAM 2014）に参加し，今回のテーマである「指数積と量子解析」のミニシンポジュームを主催した．この分野の著名な研究者（写真 7.1 参照）と交流を深めることができ，大変有意義な会であった．会議前日にロドス島の旧市街地，特にピタゴラス通りやソクラテス通りを歩きながら数学や科学の歴史に思いを馳せた．筆者の都立白鴎高校時代には，女子高生に「ソクラテス」と渾名をつけられ，数学のとき以外は敬遠されていたことなどを懐しく思い出した（その当時は，数学者になることを夢みていた）．

会議の後に，アテネに3日ほど滞在し，アクロポリスの丘に登り，古代ギリシャの遺跡群を見て回った（写真 7.2 参照）．その際，それまであまり関心のなかった魔方陣を考えたくなった．それは心のゆとりであろうか．この問題には古い歴史があり，解説書も多くあるだろうと想像できた[3]．しかし，何となくルールは知っていたので，まずは何も調べずに自分で初めから考えてみることにした．本を読

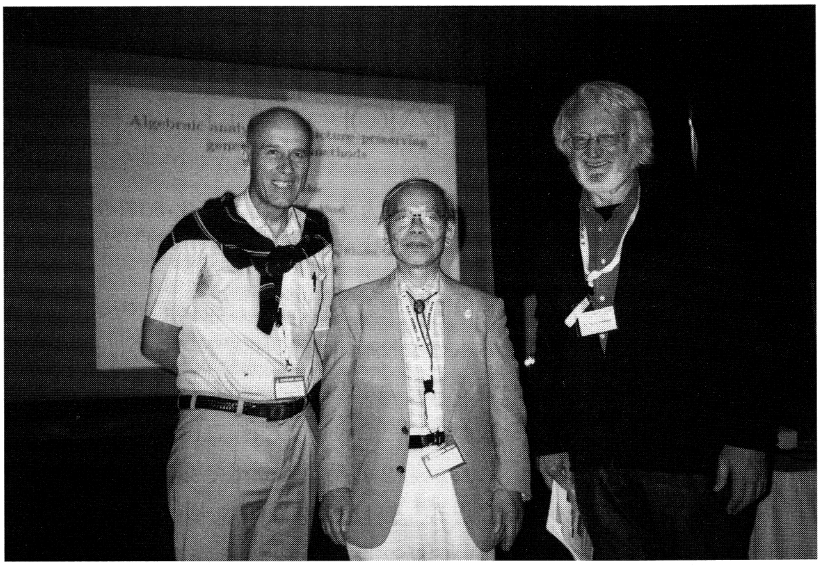


写真 7.1　文献 4) の著者のうちの E. Hairer 教授(左), G. Wanner 教授(右)と.



写真 7.2　アテネのアクロポリスの丘からの眺め. 手前は古代劇場（筆者撮影).

んで解き方を知ると，それだけ自分で考える楽しみが減ってしまうからである.

最初に図 7.1 のような 3×3 の魔方陣の解き方を考える.

まず，1 から 9 までの自然数を奇数 1, 3, 5, 7, 9 のグループと偶数 2, 4, 6, 8 のグループに分ける．各列の和は $(1+2+\cdots+9)/3 = 15$ であることがわかり，これは奇数であるから，図 7.1 (a) のように，各列に△は奇数個（1 個または 3 個）配列することになる．これが，この問題の最初の手順の分離である．すなわち，図 7.1 (b) のように十字の 5 つの枡目に 1, 3, 5, 7, 9 の 5 個の奇数を配列して，縦と横の列の和がそれぞれ 15 になるようにする問題をまず考える．これは簡単に解ける．すなわち，15 を 3 つの異なる奇数の和で表すと，$15 = 7+5+3 = 9+5+1$ という 2 種類に限られることがわかる．この分解で

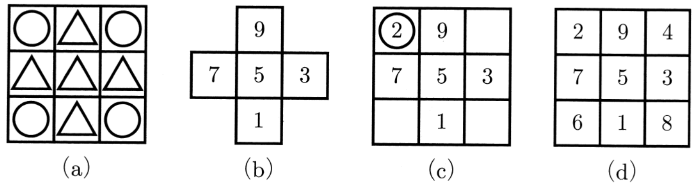


図 7.1　3×3 の魔方陣．(a) 奇数 1, 3, 5, 7, 9 を△印で表し，偶数 2, 4, 6, 8 を○印で表す．(b) 奇数の配置．(c) まず，2 の位置が決まる．(d) 最終図．

は奇数 5 は 2 回現れるので図 7.1 (b) の中央の数が 5 となる．図形を 90° 回転して重なるものや反転して同じになるものは同一の魔方陣とみると，奇数 9 はどこにおいてもよいことになり，図 7.1 (b) のように上の枡目に 9 を配置しても一般性を失わない．こうして，図 7.1 (b) のような配列が解となることが容易にわかる．これが第 2 の手順の分離である．よって，5 個の奇数の配列は図 7.1 (b) のようになる．偶数 2, 4, 6, 8 を残りの桝目にはめ込むのは容易である．まず，一番小さい偶数 2 は，2 つの大きな奇数 7 と 9 の隣の角に来る（図 7.1 (c)）．その後は，芋蔓式に決まり，図 7.1 (d) の魔方陣となる（または，15 を 2 を含む偶数 2 個と奇数 1 個で表すと，$15 = 2+7+6 = 2+9+4 = 2+5+8$ となることを用いてもよい）．実は，未知数 $x_1, \cdots, x_9$ を左上から順に割り当て，条件式を作ると，連立方程式の数が 8 個となり，不定方程式となってしまい，そのままでは解けない．中央の数が対称性から考えて 5 であるとすると連立方程式の数が 8 個となり，未知数の数と一致する．しかし，8 個の方程式は互いに独立ではない（係数行列の行列式が零になる）ため，まだ不定である．このように，魔方陣を代数的に解くのは面倒である．魔方陣の問題は，うまい工夫をすることによって解けるところに，古来から多くの人々[3)]をとりこにしてきた魅力がある．

物理の研究でも，同様の戦略でうまくいくことがある．理論の場合には実験設備も必要ないので，あまり時間をかけて先行研究があるかどうか調べて労力を費やさず，まず自分のアイデアを育て発展させて結果を出してみるのもよい．それから同じ研究があるかどうか調べるのも一つの有効な方法である．私はこの方法を好んで用いている．たとえ，先行研究に似たようなものがあっても自分の研究成果と全く同じということは少ないものである．

こうして研究を進め，新しいところのみ論文にすればよい．これでは一見研究の無駄が多いように思われるかもしれないが，そもそも研究には無駄やリスクは付きものである．

さて，よりサイズの大きい魔方陣になるとますます解き方は複雑になる．サイズが奇数の場合には，上に用いた方法が容易に拡張できる（奇数・偶数分離魔方陣[3)]）．

さらに，特殊な $3^n \times 3^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の魔方陣は 3×3 の魔方陣と類似の法則が存在して興味深い[3)]．

実は，後で詳しく解説する高次の指数積公式[5~11)]を漸化式の方法で一般的に無限次まで構成する筆者の理論[5~7)]と上の魔方陣の構成法とは考え方に関して類似していることを強調しておきたい．

7.3 フォッカー・プランク方程式のリー代数的解法と手順の分離

ここでは，物理現象を例にして「手順の分離」の考え方を説明しよう．通常の力学で扱うニュートンの法則には時間の2階微分しか現れないので，基礎方程式は時間反転に対して対称的である．しかし，現実の体系は速度（時間の1階微分）に比例する摩擦抵抗などを受けるので，体系を記述する基礎方程式は（以前に変分原理の解説でふれたように），時間反転対称性を破る項を含む．このような系では，不可逆的な現象が起こる．ブラウン粒子の速度のような着目する変数を x として，それが1次元的に拡散する現象は，時刻 t で変数 x をとる確率分布 $P(x,t)$ に対するフォッカー・プランク方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\gamma\frac{\partial}{\partial x}(xP) + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}P \tag{7.1}$$

で記述される．ただし，上式の右辺第1項はドリフト項と呼ばれ，変数 x の時間変化が $-\gamma x$ に比例してドリフトする効果を表す．第2項は拡散定数を ε とする拡散効果を表す．式 (7.1) は形式的には，2つの微分演算子

$$A = -\gamma\frac{\partial}{\partial x}x,\ \text{および}\ B = \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{7.2}$$

を用いて

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (A+B)P \tag{7.3}$$

と書ける．この方程式の形式的な解は，指数演算子を用いると

$$P(x,t) = \mathrm{e}^{t(A+B)}P(x,0) = \mathrm{e}^{tA+tB}P_0(x) \tag{7.4}$$

と表される．すなわち，初期分布 $P_0(x)$ $(= P(x,0))$ がわかれば，原理的に任意の時刻の分布関数 $P(x,t)$ が求まることになる．問題は，この指数演算子をいかに取り扱うかである．2つの演算子は互いに可換でない（非可逆である）ため，2つの積 $\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}$ に分けることができない．仮に2つの指数積に分解できるとすれば，事は簡単である．なぜならば，指数演算子 e^{tA} と e^{tB} の効果はそれぞれ次の公式

$$\exp\left(-\gamma(t)\frac{\partial}{\partial x}x\right)P(x) = \mathrm{e}^{-\gamma(t)}P\left(x\mathrm{e}^{-\gamma(t)}\right) \tag{7.5}$$

および

$$\exp\left(\varepsilon(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)P(x) = \{4\pi\varepsilon(t)\}^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon(t)}\right]P(y)dy \tag{7.6}$$

を用いて容易に処理できるからである[12)]．すなわち，A の効果は，式 (7.5) からわかる通り，初期分布を変数変換するだけで表される．例えば，$t=0$ で $x=x_0$ とすると，$P_0(x) = \delta(x-x_0)$ となり，A による $P_0(x)$ の時間変化は

$$\mathrm{e}^{tA}P_0(x) = \mathrm{e}^{-\gamma(t)}P_0\left(x\mathrm{e}^{-\gamma(t)}\right) = \mathrm{e}^{-\gamma(t)}\delta\left(x\mathrm{e}^{-\gamma(t)}-x_0\right) = \delta\left(x-x_0\mathrm{e}^{\gamma(t)}\right) \tag{7.7}$$

と与えられる．ただし，$\delta(x)$ はデルタ関数である．時刻 t で $x = x_0 \mathrm{e}^{\gamma(t)}$ にドリフトするだけである．分布の形は本質的に変わらない．次に B の効果は，式 (7.6) からわかる通り，幅 $\varepsilon(t)$ で分布が広がっていく拡散現象を与える．

実は大変興味深い関係が A と B の間に存在する[12]．それは，A と B の変換関係が次のように B だけで表されるということである：

$$[A, B] = \alpha B; \quad \alpha = 2\gamma. \tag{7.8}$$

すなわち，$\{A, B\}$ は 2 次元リー代数を構成している．この事実に着目し，後で述べる量子解析を用いると，指数演算子 $\mathrm{e}^{t(A+B)}$ は次のように簡単な指数積に分解できる[12]：条件式 (7.8) の下に，任意の λ に対して

$$\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{\lambda\nu(\alpha)tB}\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{(1-\lambda)\nu(-\alpha)tB}; \quad \nu(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha}-1}{\alpha} \tag{7.9}$$

の公式が成り立つ．そこで，$\lambda = 0$ の場合の公式 (7.9) を用いると，式 (7.4) は次のようにあらわに積分形で表される：

$$P(x,t) = \exp\left(-\gamma t \frac{\partial}{\partial x} x\right) \exp\left[\left(1-\mathrm{e}^{-2\gamma t}\right)\left(\frac{\varepsilon}{2\gamma}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] P(x,0)$$
$$= \left\{\frac{2\pi\varepsilon\left(\mathrm{e}^{2\gamma t}-1\right)}{\gamma}\right\}^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(y-\mathrm{e}^{-\gamma t}x)^2}{2\varepsilon\left(1-\mathrm{e}^{-2\gamma t}\right)/\gamma}\right] P(y,0)dy. \tag{7.10}$$

要するに，拡散とドリフトの効果を分離して扱うことができることになる．その代わり，2 つの絡み合いの効果は，式 (7.10) で示されているように，拡散定数が有効的に時間に依存することに反映されている．すなわち，最初はランダムな力（ノイズ）によって体系のゆらぎが大きくなり（拡散し），それらがさらに方向性のある平均的な力（ドリフトの効果）によって発展していき，くり込まれた非線形の（指数関数 $\exp(2\gamma t)$ の）有効的時間によって上記 2 つの効果が統合される．これは，“手順の分離と統合” の興味深い例の一つである．この戦略は，ドリフト項が非線形の場合にも漸近的に有効であり，秩序形成の “スケーリング理論” として多くの問題に応用されている[13~15]．

ところで，この節の例（交換関係が式 (7.8) のように閉じている演算子の集まり）のように，リー代数をみたす演算子に対しては，指数演算子の指数積分解が厳密にできるが，一般の演算子に対しては，次節で示すように近似的な指数積分解を扱うことになる．

7.4 指数演算子の高次分解とその実用的意義

前節の例からもわかる通り，互いに非可換な演算子 A と B に対して e^{xA} と e^{xB} がそれぞれ解析的に扱える場合には，指数演算子 $\mathrm{e}^{x(A+B)}$ を e^{xA} と e^{xB} の巾積

$$\mathrm{e}^{x(A+B)} = \mathrm{e}^{t_1 xA}\mathrm{e}^{t_2 xB}\mathrm{e}^{t_3 xA}\mathrm{e}^{t_4 xB}\cdots\mathrm{e}^{t_M xB} + \mathrm{O}(x^{m+1})$$
$$\equiv f_m(xA, xB) + \mathrm{O}(x^{m+1}) \tag{7.11}$$

の形に近似的に分解すると，大変便利なことが多い[5~12]．ここで，上式の右辺が x の m 次まで左辺と一致するようにパラメータ $\{t_j\}$ を決める．こうして求めた右辺の指数積を $f_m(xA, xB)$ と書き，m 次指数積と呼ぶ．容易に $m = 1, 2$ に対しては，

$$f_1(xA, xB) = \mathrm{e}^{xA}\mathrm{e}^{xB} \left(\text{または } \mathrm{e}^{xB}\mathrm{e}^{xA}\right), \tag{7.12}$$

および

$$f_2(xA, xB) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}A}\mathrm{e}^{xB}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}A} \left(\text{または } \mathrm{e}^{\frac{x}{2}B}\mathrm{e}^{xA}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}B}\right) \equiv S_2(x) \tag{7.13}$$

であることがわかる．

しかし，$m \geq 3$ になると，見掛けによらず，大変面倒な問題となる[5~12]．特に，初等的に式 (7.11) の両辺の指数演算子をそれぞれ，A と B の非可換性に配慮しながら m 次まで展開し，各項を整理し，両辺が演算子として m 次まで互いに一致する条件式を求めると，パラメータ $\{t_j\}$ に関する非線形の連立方程式が多数出てくる．パラメータ $\{t_j\}$ の数 M が小さいと連立方程式の数のほうが多くなり，解がない．すでに多くの人がこの問題に苦労した末に $m = 3, 4$ などに対しては特殊な解を見つけている[4]．筆者は，$m = 4$ の場合を詳しく調べているうちに，それまでの他の研究とは全く異なる系統的な分解公式の構成法を発見し，任意の次数まで，パラメータ $\{t_j\}$ を解析的に与える一般論を作ることに初めて成功した[5~7]．それが次に説明する漸化式の方法である．

その漸化式の方法による高次分解の話に入る前に，m 次の分解公式 $f_m(xA, xB)$ がわかると，実際の科学・技術の分野の研究でどのようなご利益があるのかにふれておきたい．変数 x が小さくない場合にはどうするか工夫が必要である．それはトロッター公式

$$\mathrm{e}^{x(A+B)} = \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}A}\mathrm{e}^{\frac{x}{n}B}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}A}\mathrm{e}^{\frac{x}{n}B}\right)^n + \mathrm{O}\left(\frac{x^2}{n}\right) \tag{7.14}$$

にならって調べてみると容易に

$$\mathrm{e}^{x(A+B)} = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}(A+B)}\right)^n = \left(f_m\left(\frac{xA}{n}, \frac{xB}{n}\right)\right)^n + \mathrm{O}\left(\frac{x^{m+1}}{n^m}\right) \tag{7.15}$$

となることがわかる[4~12]．したがって，変数 x が 1 より大きくても，トロッター数 n を充分大きくすれば，また，分解公式の次数 m を大きくすれば，いくらでも近似の精度を上げることができる．勿論，高次分解公式の次数が高くなるほど，計算のアルゴリズムが複雑になるので計算精度との兼ね合いが肝要となる．通常，4 次の分解公式，特に，筆者の発見した安定性のよい標準分解公式 $S_4^*(xA, xB)$ がよく利用されている（多くの数値計算のプログラムに実装されている）．

このように，もとの指数演算子 $\exp[x(A+B)]$ を A だけの指数演算子と B だけの指数演算子をくり返し掛け合わせることによって精度よく近似することは，前に述べた“手順の分離と統合”の典型的な例になっている．ただし，A と

B はそれぞれ単独には簡単な解析的処理のできる演算子を表すものとする．最近の科学・技術の研究では，実際に実験する前に計算機実験をすることが多く，そのときに，上に説明した公式が大変役に立つ．単純な計算のくり返しを多数回行うのは超高速計算機の最も得意とするところである．式 (7.11) と式 (7.15) の組合せによるアルゴリズムは，様々な科学・技術のシミュレーションの分野で最近よく用いられている．

そこで，次の節では，安定性の良い分解公式を体系的に構成する一般的な方法を解説する．

7.5 漸化式の方法による高次分解[5~12)]

一般に，q 個の任意の演算子 $\{A_j\}$ に対して，式 (7.11) の形の $(m-1)$ 次の指数積 $Q_{m-1}(x)$ が求まったとする：

$$\mathrm{e}^{x(A_1+\cdots+A_q)} = Q_{m-1}(x) + \mathrm{O}(x^m). \tag{7.16}$$

このとき，m 次の近似式は，r を適当にとって

$$Q_m(x) = \prod_{j=1}^{r} Q_{m-1}(p_{m,j}x) \tag{7.17}$$

で与えられる．ただし，パラメータ $\{p_{m,j}\}$ は条件式

$$\sum_{j=1}^{r} p_{m,j}^m = 0,\ \text{および}\ \sum_{j=1}^{r} p_{m,j} = 1 \tag{7.18}$$

で決まる[5,6)]．その理由は，式 (7.17) の右辺の積を式 (7.16) を用いて計算してみると，式 (7.18) の第 2 式の条件より，$(m-1)$ 次まで正しいことは直ちにわかる．次に m 次の補正項が式 (7.18) の第 1 式の左辺に比例することに着目すればよい．

ここで新たな困難が現れる．式 (7.18) は m が奇数のときは，実数解が存在するが，m が偶数のときは解は複素数となる．これでは実用上不便である．幸いにして，次の条件 $p_{m,j} = p_{m,M-j+1}$ をみたす対称解 $S_m(x)$ を用いると，奇数解 $S_{2m-1}(x)$ は自動的に $2m$ 次まで正しいことがわかる：

$$S_{2m-1}(x) = S_{2m}(x); \quad S_{2m}(x)S_{2m}(-x) = 1. \tag{7.19}$$

この事実を用いると，条件式 (7.18) は

$$\sum_{j=1}^{r} p_{2m-1,j}^{2m-1} = 0,\ \text{および}\ \sum_{j=1}^{r} p_{2m-1,j} = 1 \tag{7.20}$$

に置き換えることができ，常に実数解 $\{p_{2m-1,j}\}$ が存在する．一番簡単には，$r=3$ として，

$$S_{2m-1}(x) = S_{2m}(x)$$

$$= S_{2m-3}(k_m x) S_{2m-3}((1-2k_m)x) S_{2m-3}(k_m x)$$
$$= S_{2m-2}(k_m x) S_{2m-2}((1-2k_m)x) S_{2m-2}(k_m x) \qquad (7.21)$$

の漸化式で与えられる．ここで，パラメータ k_m は解析解 $k_m = 1/(2-2^{1/(2m-1)})$ で与えられる[5,6]．ところが，別な問題が生じる．それは，$k_m > 1$ となり，$m \to \infty$ で $S_{2m}(x)$ がもとの指数演算子に収束しないことである．これを解決するには，$r=5$ として，次の標準分解公式と呼ばれる漸化式[5,6]を用いればよい：

$$S^*_{2m}(x) = \left[S^*_{2m-2}(p_m x)\right]^2 S^*_{2m-2}((1-4p_m)x) \left[S^*_{2m-2}(p_m x)\right]^2;$$
$$p_m = \frac{1}{4-4^{1/(2m-1)}}. \qquad (7.22)$$

明らかに，$m \geq 2$ のすべての m に対して，$\frac{1}{3} < p_m < \frac{1}{2}$ および $|1-4p_m| < \frac{2}{3}$ となり，$S^*_{2m}(x)$ はもとの指数演算子に収束することが証明できる[9]．特に，4次の標準分解公式 $S^*_4(x) = S_2^2(p_2 x) S_2((1-4p_2)x) S_2^2(p_2 x)$ が多くの分野で広く利用されている．ただし，

$$S_2(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}A_1} \cdots \mathrm{e}^{\frac{x}{2}A_{q-1}} \mathrm{e}^{xA_q} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}A_{q-1}} \cdots \mathrm{e}^{\frac{x}{2}A_1}; \quad p_2 = \frac{1}{4-4^{1/3}} \quad (7.23)$$

である．

7.6 おわりに

以上のように，漸化式の方法を用いると，任意の次数まで解析的なパラメータを用いて容易に精度の良い近似公式が作れる．

参考文献

1) 鈴木増雄，本連載第 6 回，「数理科学」2015 年 2 月号（サイエンス社）．
2) 鈴木増雄，「手順の分離と統合—指数積分解，秩序形成およびエントロピー生成」，『数理物理　私の研究』（荒木不二洋/江口徹/大矢雅則編，丸善出版，2012 年）．
3) 例えば，Wikipedia の魔方陣の項目，http://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%AD%94%E6%96%B9%E9%99%A3.
4) E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner, *Geometric Numerical Integration* (Springer, 2006).
5) M. Suzuki, *Phys. Lett. A* **146**, 314 (1990); ibid. **165**, 387 (1992).
6) M. Suzuki, *J. Math. Phys.* **32**, 400 (1991).
7) M. Suzuki, *Physica A* **191**, 501 (1992); ibid. **194**, 432 (1993); ibid. **205**, 65 (1994).
8) K. Umeno and M. Suzuki, *Phys. Lett. A* **181**, 387 (1993); M. Suzuki and K. Umeno, *Springer Proceedings in Physics* **76**, 74, edited by D.P. Landau *et al.* (1993).
9) M. Suzuki, *Commun. Math. Phys.* **163**, 491 (1994); *Rev. Math. Phys.* **8**, 487 (1996).
10) Z. Tsuboi and M. Suzuki, *Int. J. Mod. Phys. B* **9**, 3241 (1995).
11) H. Kobayashi, N. Hatano and M. Suzuki, *Physica A* **211**, 234 (1994).
12) 鈴木増雄，『統計力学』（岩波書店，2000 年）．
13) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **56**, 77, 477 (1976); ibid. **57**, 380 (1977), and ibid. *Suppl.* No.**64**, 402 (1978).
14) M. Suzuki, *Adv. Chem. Phys.* **46**, 195 (1981).
15) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* No.**195**, 114 (2012).
この論文では，佐藤–Guth の宇宙のインフレーションモデルとの関連性も議論している．また，不可逆的な輸送現象におけるエントロピー生成についても論じている．

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）

特　集（2015年4月号予告）		
代数学における様々な発想	代数の発想と進化	寺杣　友秀
その思考方法の拡がりを知る	「線形代数」は「代数」であるか？	海老原　円
	代数方程式の天才たち	木村　俊一
	代数幾何学の面白さ	小木曽啓示
	Galois 表現と整数論	三枝　洋一
	表現論の発想	有木　進
	微分方程式とガロア理論	原岡　喜重
	可換代数と統計学	日比　孝之
	［コラム］	高山　信毅
	《名著に親しむ》	梶　元

特　集（2015年2月号）		
物理学諸分野の拡がりとつながり	物理学は一つ	藤川　和男
現代物理の全体像を素描する	力学・解析力学	原田　恒司
	電磁気学とその発展	出口　真一
	熱・統計力学　量子力学による基礎付けは可能か？	早川　尚男
	量子力学　歴史・骨子・展開，そして基礎付け	谷村　省吾
	相対性理論　100年の時を経た，時空と重力の理論	早田　次郎
	物性物理学　物質に潜む普遍的概念	押川　正毅
	素粒子物理学	林　青司
	量子重力理論	橋本　幸士
	《フィールズ賞で語る現代数学》第4回	山崎　隆雄
	《連載》微分方程式を考える　その6	小澤　徹
	経路積分と量子解析　その6	鈴木　増雄

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．

今回のテーマである“団代数”（cluster algebra）は中西先生の巻頭記事で2000年頃に導入されたとあります．つまり，比較的若い分野ということです．若いとはいっても各記事は，先端を感じさせつつも何年も前からあるような印象のある解説ばかりです．本分野の雰囲気が感じられたのではないでしょうか．

登場してから年数があまり経っていない新しい分野を取り上げることは，ある意味で挑戦的な面もありますが，今後も新しい分野を取り上げて，そこにある様々な考え方を読者の皆様に提供できればと思います．（R）

*　　　*

「団代数」の概念が導入されたのは比較的最近のようですが，近年大変注目されている数学の一つのようです．このような先端の話題を本誌で取り上げることの意義を強く感じました．団代数はまだまだこれからもさらに発展していくのではないかと思います．

また，解説記事のラインナップをみてみると様々な分野で団代数が活躍していることが窺えます．ひょっとしたら数年後にはますます幅広く，また思いもよらない分野で活躍して，今後本誌で取り上げる特集にも度々登場することになるかもしれません．（T）

数　理　科　学　3月号

2015年3月1日発行

数理科学編集部　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁